

624.04
m-92

Müller-Breslau,
профессоръ политехникума въ Берлинъ.

Выпускъ VI.

Трафическая статика сооруженій.

Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія.

Т. Т. Кривошеинъ,

Военный инженеръ, преподаватель Николаев-
ской Инженерной Академіи и Училища.

Л. Н. Казинъ,

Военный инженеръ.

Томъ II.

СОДЕРЖАНІЕ выпуска VI:

Основные законы теоріи упругихъ фермъ.

1. Опредѣленіе деформаций плоской рѣшетки и примѣненіе ихъ къ изслѣдованію статически неопредѣлимыхъ и статически опредѣлимыхъ фермъ.

§ 1. Діаграммы перемѣщеній по способу Вилліо.

§ 2. Діаграммы перемѣщеній по способу шарнирнаго многоугольника.

Изданіе инженера Л. Н. Казина.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типо-литографія и переплетная Ю. А. Мансфельдъ, Малая Морская, № 9.

1899.

125
18. 11.

125
18. 11.

125
18. 11.

2188

17

У 624.04
м-98

Müller-Breslau,

профессоръ политехникума въ Берлинѣ.

Выпускъ VI.

Трафическая статика сооруженій.

Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія.

да 2188

Т. Т. Кривошеинъ,

Военный инженеръ, преподаватель Николаев-
ской Инженерной Академіи и Училища.

Л. Н. Казинъ,

Военный инженеръ.

✓ Томъ II.

СОДЕРЖАНІЕ выпуска VI:

Основные законы теоріи упругихъ фермъ.

1. Опредѣленіе деформаций плоской рѣшетки и примѣненіе ихъ къ изслѣдованію статически неопредѣлимыхъ и статически опредѣлимыхъ фермъ.

§ 1. Диаграммы перемѣщеній по способу Вилліо.

§ 2. Диаграммы перемѣщеній по способу шарнирнаго многоугольника.

Изданіе инженера Л. Н. Казина.

— ❦ —

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типо-литографія и переплетная Ю. А. Мансфельдъ, Малая Морская, № 9.

1899.

Дозволено цензурою, С.-Петербургъ. 26 Января 1899 года.

Предисловіе ко II тому.

Въ предлагаемомъ отдѣлѣ Статики Сооруженій излагается одно изъ наиболѣе важныхъ примѣненій теоріи упругости; задача этого отдѣла заключается въ подробномъ изученіи измѣненій формы плоскихъ рѣшетокъ и въ развитіи теоріи статически неопредѣлимыхъ рѣшетчатыхъ фермъ.

Точкой отправленія приэтомъ служитъ законъ возможныхъ перемѣщеній и вытекающая изъ него теорема Максвелла о взаимности упругихъ деформаций; это *аналитическое* основаніе, съ перваго взгляда, кажется не вполне подходящимъ для учебника *графической* статики.—Но кто желаетъ углубиться въ область теоріи упругости, тому приходится всегда производить нѣкоторыя подготовительныя работы путемъ вычисленія, и, въ виду такого положенія дѣла, врядъ ли найдутся достаточныя основанія, чтобы пренебречь такимъ превосходнымъ пособіемъ, какъ новѣйшая аналитическая теорія, и замѣнить ее болѣе сложными средствами. Графическимъ приемамъ остается еще очень обширное поприще: построеніе диаграммъ перемѣщеній и употребленіе этихъ диаграммъ для построенія линій вліянія и чиселъ вліянія, дающихъ самыя точныя отвѣты на всѣ вопросы, которые могутъ представиться при разсмотрѣніи данной рѣшетки.

Наша книга раздѣляется на слѣдующія части:

Введеніе представляетъ выводы основныхъ положеній новѣйшей аналитической теоріи, при томъ условіи, что для строительныхъ матеріаловъ существуетъ законъ пропорціональности, и что напряженіе лежитъ въ предѣлахъ пропорціональности; это предпо-

ложенеі примѣнимо исключительно для разсматриваемыхъ фермъ изъ сварочнаго желѣза и стали *).

При изложеніи теоріи авторъ старался быть очень краткимъ; онъ надѣется, что ему удалось, введеніемъ легко разсматриваемыхъ отдѣльныхъ примѣровъ, устранить тѣ трудности, которыя могутъ представиться для начинающаго; авторъ приводитъ различные частныя примѣры, уясняющіе общія правила теоріи.

Въ первомъ отдѣлѣ, въ §§ 1—4 **), излагаются различные графическіе способы изображенія перемѣщеній узловыхъ точекъ плоскихъ рѣшетокъ, а также и численный способъ, который во многихъ случаяхъ бываетъ проще графическаго.

Эта важная часть книги разработана особенно подробно; въ ней разрѣшаются, съ помощью кинематики, какъ простыя задачи, такъ и болѣе трудныя. Въ § 5 ***) приведенъ рядъ задачъ на статически неопредѣлимые рѣшетки, гдѣ доказывается, что опредѣленіе статически неопредѣлимыхъ величинъ основывается всегда на построеніи простыхъ діаграммъ перемѣщеній, дающихъ вѣрное рѣшеніе и въ болѣе трудныхъ случаяхъ. Конецъ перваго отдѣла составляетъ добавленіе къ ученію о статически неопредѣлимой рѣшѣткѣ; для опредѣленія напряженій стержней и сопротивленій опоръ употребляется законъ возможныхъ перемѣщеній въ связи съ построеніемъ діаграммъ перемѣщеній.

Этимъ кончается теорія плоской рѣшетки. II отдѣлъ ****) за ключаетъ только примѣненія: здѣсь разсматриваются подробнѣе самыя важныя статически неопредѣлимые фермы,—сначала двухшарнирные арки, затѣмъ арки съ жесткой балкой, арки, закрѣпленныя по концамъ, и неразрѣзныя балки.

*) Относительно свойствъ фермъ изъ литаго желѣза можемъ указать на третью книжку журнала *Zeitschr. d. Oesterr. Archit. u. Ing. Ver.* III Heft. 1891, которая содержитъ отчетъ комитета по мостовымъ матеріаламъ о примѣненіи литаго желѣза къ мостовымъ конструкціямъ и научныя объясненія къ этому отчету со стороны профессора Brik'a. Укажемъ еще на превосходное сочиненіе Баха «ученіе объ упругости и прочности» (*Bach «Lehre von der Elasticität und Festigkeit»*, Berlin 1889), которое еще не появилось, когда печаталась первая половина нашей книги (около 1888 г.). Къ важнѣйшимъ результатамъ опытовъ Баха относится то положеніе, что для чугуна закона пропорціональности не существуетъ.

Во второй части этого тома мы займемся разсмотрѣніемъ тѣхъ случаевъ, когда предположеніе пропорціональности деформаций напряженіямъ не имѣетъ мѣста.

**) Выпускъ VI и VII.

***) Выпускъ VII.

****) Выпускъ VIII, IX, X.

Всѣ эти изслѣдованія, составляющія дополненіе къ общей теоріи, излагаемыя авторомъ на лекціяхъ въ Берлинской Высшей Технической Школѣ даютъ возможность овладѣть этимъ важнымъ научнымъ матеріаломъ безъ большой потери времени. Дѣйствительно, учащемуся слѣдуетъ старательно разработать только одинъ примѣръ, чтобы пріобрѣсти полную увѣренность во всей этой области.

Само собою понятно, что этотъ способъ изложенія, имѣющій цѣлью усвоеніе общихъ законовъ, требуетъ отъ изучающаго вначалѣ нѣсколько большаго умственного труда, чѣмъ изученіе отдѣльных простѣйшихъ примѣровъ, изъ которыхъ каждый долженъ рѣшаться съ самаго начала. Но за то, этотъ способъ даетъ болѣе, чѣмъ простое указаніе для рѣшенія легкихъ задачъ.

Берлинъ. Сентябрь 1891 г.

H. Müller-Breslau.



ОГЛАВЛЕНІЕ

ВЫПУСКА VI.

ВВЕДЕНІЕ.

СТР.

Основные законы теоріи упругихъ фермъ.

А. Рѣшетка.	9
В. Законы для однородныхъ твердыхъ тѣлъ произвольнаго вида	43

ОТДѢЛЪ I.

Опредѣленіе деформаций плоской рѣшетки и примѣненіе ихъ къ изслѣдованію статически неопредѣлимыхъ и статически опредѣлимыхъ фермъ.

§ 1. Диаграмма перемѣщеній по способу Вилліу.	57
§ 2. Диаграммы перемѣщеній по способу шарнирнаго многоугольника . . .	82



Введеніе.

Основные законы упругихъ фермъ.

А. Рѣшетчатая ферма.

а. Предположенія и объясненія. Условія упругости. Законъ сложения отдѣльныхъ дѣйствій.

1. Если рѣшетчатая ферма, составленная изъ упругихъ стержней и лежащая на упругихъ опорахъ, будетъ подвержена дѣйствию внѣшнихъ силъ и измѣненію температуры, то передъ наступленіемъ равновѣсія, которое предполагается возможнымъ, она получитъ нѣкоторое видоизмѣненіе. Перемѣщенія, получаемыя приэтомъ узловыми точками, если только они происходятъ вслѣдствіе растяжимости стержней и упругости опоръ, называются *упругими*. Перемѣщенія эти бываютъ въ большинствѣ случаевъ, такъ малы, что величиной ихъ можно пренебречь и, при составленіи условій равновѣсія, можно считать всѣ силы въ томъ положеніи, которое они приняли бы въ случаѣ полной жесткости стержней и опоръ.

При слѣдующихъ изслѣдованіяхъ примемъ, что силы постепенно возрастаютъ, т. е. предположимъ, что состояніе равновѣсія наступаетъ безъ качаній. Разсмотримъ плоскія рѣшетки и рѣшетки въ пространствѣ, и то только для случая весьма малыхъ и упругихъ деформаций. Первая цѣль этихъ изслѣдованій есть выводъ общихъ отношеній между измѣненіями длины стержней и зависящими отъ этихъ измѣненій перемѣщеніями узловыхъ точекъ. Эти отношенія даютъ возможность опредѣлить форму видоизмѣненной рѣшетки, а также даютъ основное положеніе для опредѣленія напряженій и сопротивленій опоръ тѣхъ статически неопредѣлимыхъ рѣшетокъ, которыя, по удаленіи нѣкоторыхъ стержней или опоръ, могутъ обратиться въ статически опредѣлимые, подверженныя исключительно упругимъ деформациямъ.

2. Сначала предположимъ, что внѣшнія силы дѣйствуютъ только въ узлахъ; слѣдовательно, всѣ стержни подвержены исклю-

чительно растяженію или сжатію. Всѣ стержней предполагаемъ приэтомъ распределеннымъ по узламъ (см. томъ I, выпускъ III, § 28).

Всѣ данныя внѣшнія силы назовемъ *грузами* въ отличіе отъ вызываемыхъ въ опорахъ *сопротивленій*. Буквой P будемъ обозначать грузъ, а буквой Q — вообще внѣшнюю силу, будетъ ли это грузъ или сопротивленіе. До начала измѣненія температуры и до дѣйствія внѣшнихъ силъ считаемъ всѣ стержни ненапряженными.

Обозначимъ буквами:

- S —напряжение въ какомъ нибудь стержнѣ,
- s —начальную длину этого стержня,
- Δs —величину измѣненія длины s (эта величина отрицательна, если стержень укорачивается),
- $\frac{\Delta s}{s}$ —*относительное удлинніе* стержня,
- F —поперечное сѣченіе стержня, предполагаемого призматическимъ,
- E —коэффициентъ упругости, принятый одинаковымъ для всѣхъ точекъ стержня,
- t —равное для всѣхъ точекъ стержня возвышеніе температуры,
- ε —относительное удлинненіе, соотвѣтствующее возвышенію температуры на $1^{\circ} C$, (коэффициентъ расширенія),
- $\sigma = \frac{S}{F}$ —*напряженіе* стержня, —положительное, если стержень растянутъ.

Относительное удлинненіе опредѣлится по слѣдующей формулѣ:

$$(1) \quad \frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{S}{EF} + \varepsilon t.$$

Если написать: $\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma + \varepsilon Et}{E}$, то можемъ заключить, что возвышеніе температуры оказываетъ на Δs такое же вліяніе, какъ увеличеніе напряженія на εEt ,—законъ которымъ мы впослѣдствіи будемъ часто пользоваться. Обыкновенно принимаютъ:

для *железныхъ стержней*:

$$\varepsilon = 0,000\ 012 \text{ и } E = 2\ 000\ 000 \text{ клгр. на кв. см.} = \\ = 20\ 000\ 000 \text{ тон. на кв. м.}$$

для *стали*:

$$\varepsilon = 0,000\ 011 \text{ и } E = 2\ 150\ 000 \text{ клгр. на кв. см.} = \\ = 21\ 500\ 000 \text{ тон. на кв. м.,}$$

а отсюда для обоихъ матеріаловъ круглымъ числомъ:

$$\varepsilon E = 24 \text{ клгр. на кв. см.} = 240 \text{ тон. на кв. м.}$$

Для *чугуна*:

$$\varepsilon = 0,000\ 011 \text{ и } E = 1\ 000\ 000 \text{ клгр. на кв. см.} = \\ = 10\ 000\ 000 \text{ тон. на кв. м.} \\ \text{и } \varepsilon E = 11 \text{ клгр. на кв. см.} = 110 \text{ тон. на кв. м.}$$

3. Положимъ, имѣемъ рѣшетку въ пространствѣ, отнесенную къ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ x, y, z . Пусть i и k какія нибудь двѣ точки, связанныя стержнемъ, длина котораго s_{ik} . Координаты $(x_i, y_i, z_i), (x_k, y_k, z_k)$ вслѣдствіе деформаци рѣшетки увеличатся на $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i), (\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k)$.

Тогда получимъ уравненія:

$$(2) \quad s_{ik}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2 \text{ и}$$

$$(3) \quad (s_{ik} + \Delta s_{ik})^2 = [(x_k + \Delta x_k) - (x_i + \Delta x_i)]^2 + [(y_k + \Delta y_k) - (y_i + \Delta y_i)]^2 + \\ + [(z_k + \Delta z_k) - (z_i + \Delta z_i)]^2 = \\ = [(x_k - x_i) + (\Delta x_k - \Delta x_i)]^2 + [(y_k - y_i) + (\Delta y_k - \Delta y_i)]^2 + \\ + [(z_k - z_i) + (\Delta z_k - \Delta z_i)]^2,$$

а затѣмъ, если вычесть (2) изъ (3), найдемъ:

$$(4) \quad 2s_{ik}\Delta s_{ik} + \Delta s_{ik}^2 = 2(x_k - x_i)(\Delta x_k - \Delta x_i) + (\Delta x_k - \Delta x_i)^2 + \\ + 2(y_k - y_i)(\Delta y_k - \Delta y_i) + (\Delta y_k - \Delta y_i)^2 + \\ + 2(z_k - z_i)(\Delta z_k - \Delta z_i) + (\Delta z_k - \Delta z_i)^2.$$

Если теперь предположить, что значенія $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta s$ такъ малы, что величинами втораго порядка можно будетъ пренебречь, то ур. (4) перейдетъ въ слѣдующее:

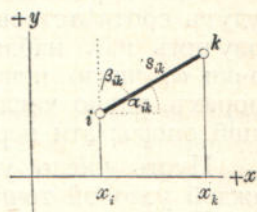
$$(5) \quad 2s_{ik} \Delta s_{ik} = 2(x_k - x_i)(\Delta x_k - \Delta x_i) + 2(y_k - y_i)(\Delta y_k - \Delta y_i) + \\ + 2(z_k - z_i)(\Delta z_k - \Delta z_i),$$

т. е. въ то уравненіе, которое можно получить, дифференцируя уравненіе (2) и замѣняя знакъ d черезъ Δ ; это уравненіе тогда строго справедливо, если $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta s$ безконечно малы.

Обозначимъ буквами $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ — углы, которые образуетъ направленіе стержня s_{ik} съ направленіями осей x, y, z , тогда:

$$x_k - x_i = s_{ik} \cos \alpha_{ik}; \quad y_k - y_i = s_{ik} \cos \beta_{ik}; \\ z_k - z_i = s_{ik} \cos \gamma_{ik},$$

(См. фиг. 1, которая относится до плоской рѣшетки); урavn. (5) можно поэтому передѣлать въ слѣдующее:



Фиг. 1.

$$(6) \quad \Delta s_{ik} = (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} + (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik},$$

а принимая во вниманіе уравненіе (1), получимъ:

$$(7) \quad \frac{S_{ik} s_{ik}}{E_{ik} F_{ik}} + \varepsilon_{ik} t_{ik} s_{ik} = (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} + \\ + (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik}.$$

Уравн. 7 называются *условіями упругости*. Если число стержней рѣшетки $= r$, то можемъ написать r условий упругости.

4. Задача теоріи рѣшетокъ состоитъ въ опредѣленіи сопротивленій опоръ и напряженій, а также и въ отысканіи формы видоизмѣненной рѣшетки. Последнюю часть этой задачи можно считать рѣшенной, если только будутъ извѣстны составляющія перемѣщеній Δx , Δy , Δz всѣхъ узловъ. Данными будемъ считать, кромѣ грузовъ P , дѣйствующихъ на рѣшетку, и измѣненій температуръ t , еще перемѣщенія опорныхъ точекъ, потому что эти перемѣщенія могутъ быть опредѣлены непосредственнымъ наблюденіемъ; только въ рѣдкихъ случаяхъ можно выразить эти перемѣщенія функціями силъ, дѣйствующихъ на опоры, и деформаций опоръ отъ измѣненій температуры, т. к. важнѣйшія причины перемѣщеній, какъ напр. остѣданіе грунта и деформации стѣнъ, до сихъ поръ мало изслѣдованы. Мы предположимъ сначала, что въ опорахъ не вызывается никакого сопротивленія тренію; будемъ различать три рода опоръ:

а) Точка опоры w движется по поверхности. Сопротивленіе опоры дѣйствуетъ перпендикулярно къ плоскости, касательной къ поверхности къ точкѣ w ; его направленіе дано, но величина неизвѣстна. При неподвижной опорѣ перемѣщеніе w въ направленіи сопротивленія опоры $= 0$; въ противномъ случаѣ это перемѣщеніе можно найти непосредственно изъ наблюденій.

б) Точка опоры w движется по линіи; она можетъ свободно двигаться по касательной къ этой линіи въ точкѣ w . Сопротивленіе опоры, дѣйствующее въ w , лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ касательной, и можетъ быть опредѣлено заданіемъ двухъ составляющихъ этого сопротивленія. При неподвижной опорѣ составляющія перемѣщеній точки w въ направленіяхъ составляющихъ реакцій равны нулю. Если опора сжимается, то перемѣщенія эти можно найти изъ наблюденій.

в) Если точка опоры w не можетъ свободно двигаться ни въ какомъ направленіи, то для опредѣленія сопротивленія въ этой точкѣ требуется заданіе трехъ составляющихъ.

При перемѣщеніи всей опоры тремъ составляющимъ реакціи будутъ соответствовать три составляющихъ перемѣщенія, которыя получимъ изъ наблюденій. Каково бы ни было устройство опоры точки w , число неизвѣстныхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ въ опорахъ, равно числу данныхъ перемѣщеній по направленіямъ реакцій опоръ; эти перемѣщенія назовемъ *деформациями* опоръ.

Пусть число узловыхъ точекъ $= k$, число стержней $= r$. Для каждой узловой точки можемъ написать три *условія равновѣсія*.

Если обозначить буквами Q_{xm} , Q_{ym} , Q_{zm} , составляющія, параллельныя осямъ x , y , z внѣшней силы Q_m , дѣйствующей въ какойнибудь узловой точкѣ m , далѣе буквами S_1, S_2, \dots, S_r напряжения стержней, исходящихъ изъ точки m и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ углы между осями стержней и осями x, y, z , то можемъ написать:

$$(8) \quad \begin{cases} Q_{xm} + \sum_1^r S \cos \alpha = 0 \\ Q_{ym} + \sum_1^r S \cos \beta = 0 \\ Q_{zm} + \sum_1^r S \cos \gamma = 0 \end{cases}$$

Въ общемъ, для рѣшетки въ пространствѣ въ нашемъ распоряженіи имѣется:

$3k$ — условій равновѣсія,
 r — условій упругости вида (7),
 a — деформаций опоръ;

эти уравненія содержатъ неизвѣстными:

r — напряженій S ,
 a — сопротивленій опоръ по заданнымъ направленіямъ,
 $3k$ — перемѣщеній Δx , Δy , Δz по осямъ координатъ k узловыхъ точекъ. (Для плоской рѣшетки вмѣсто $3k$ надо взять $2k$).

Число неизвѣстныхъ равно числу уравненій. Уравненія эти всѣ первой степени; ихъ можно рѣшить, если только опредѣлитель этихъ уравненій не содержитъ множителя, равнаго нулю,—что постоянно и будемъ предполагать. Нахожденіе этого опредѣлителя излишне, потому что впослѣдствіи будетъ данъ другой, болѣе простой путь для рѣшенія данной задачи; изъ настоящаго изслѣдованія заключаемъ, что *напряженія S , затѣмъ сопротивленія опоръ C , дѣйствующія по опредѣленнымъ направленіямъ, и перемѣщенія Δx , Δy , Δz по осямъ координатъ могутъ быть представлены, какъ линейныя функціи проекцій грузовъ $P_1, P_2, P_3 \dots$ на координатныя оси, измѣненій $t_1, t_2, t_3 \dots$ начальныхъ температуръ стержней и перемѣщеній $\delta_{w1}, \delta_{w2}, \delta_{w3} \dots$ опорныхъ точекъ w по опредѣленнымъ направленіямъ.*

Для каждой изъ искомыхъ неизвѣстныхъ, которыя мы вообще обозначимъ черезъ Z , получается выраженіе такого вида.

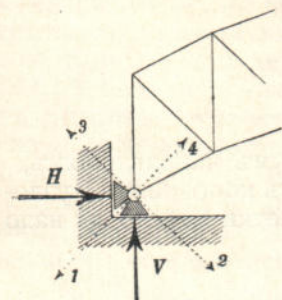
$$(9) \quad \begin{aligned} Z = & x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + \dots \\ & + \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \mu_3 t_3 + \dots \\ & + \nu_1 \delta_{w1} + \nu_2 \delta_{w2} + \nu_3 \delta_{w3} + \dots, \end{aligned}$$

гдѣ x, μ, ν коэффициенты, зависящіе отъ размѣровъ и направленія стержней, отъ величинъ E и ε , отъ координатъ x, y, z узловыхъ точекъ и отъ рода опоры рѣшетки, но не зависятъ отъ величинъ P, t, δ_w .

Если, напр., число стержней и реакцій опоръ вмѣстѣ $= 3k$ для рѣшетки въ пространствѣ и $= 2k$ для плоской рѣшетки, и если опредѣлитель условій равновѣсія не содержитъ множителя $= 0$, то всѣ величины S и C опредѣлятся съ помощью этихъ уравненій, какъ линейныя функціи грузовъ P (или съ помощью другаго болѣе удобнаго способа, который былъ изложенъ въ I томѣ для плоской рѣшетки); эти величины будутъ тогда независимы отъ t и δ_w , и рѣшетка будетъ статически опредѣлима.

5. Если рѣшетка подвергается дѣйствию системъ опредѣленныхъ грузовъ P , дѣйствию опредѣленныхъ измѣненій температуръ, а точки опоры получаютъ опредѣленные перемѣщенія, то мы говоримъ, что *рѣшетка подвержена дѣйствию опредѣленныхъ причинъ P, t, δ_w , или короче, подвержена опредѣленному внѣшнему воздѣй-*

ствію. Если рѣшетка опирается на однѣ и тѣже точки, и въ каждой точкѣ всегда одинаково, то такую рѣшетку называемъ *рѣшеткой съ неизмѣняемыми опорами*.

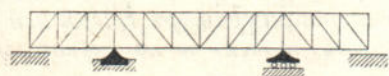


Фиг. 2.

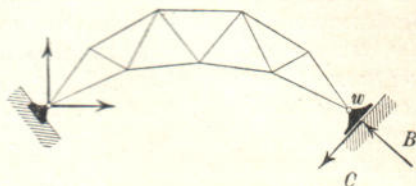
Примѣры измѣняемыхъ опоръ показаны на фиг. 2—4. На фиг. 2 въ опорѣ плоской рѣшетки дѣйствуютъ два сопротивленія V и H противъ перемѣщенія точки опоры въ направленіи стрѣлки 1, только одно сопротивленіе V противъ перемѣщенія въ направленіи 2, и одно сопротивленіе H противъ перемѣщенія въ направленіи 3, въ направленіи же 4 точка W можетъ двигаться свободно.

Рѣшетчатая балка, фиг. 3, при незначительной нагрузкѣ внѣшнихъ панелей будетъ подперта только въ двухъ точкахъ, и тогда она статически опредѣлима. Вслѣдствіе небольшихъ пониженій концовъ она можетъ перейти въ балку, лежащую на четырехъ опорахъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ, въ дважды статически неопредѣлиму.

Измѣняемая опора можетъ получиться также при большомъ сопротивленіи тренію. Если, напр., плоская ферма, фиг. 4, имѣетъ лѣвую неподвижную опору, чтобы воспрепятствовать движенію точки опоры, то ферма будетъ статически неопредѣлима (арка съ двумя шарнирами).



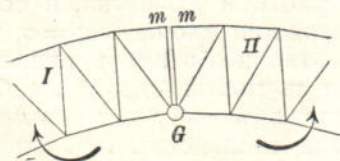
Фиг. 3.



Фиг. 4.

Въ другихъ случаяхъ она будетъ статически опредѣлима; тогда сопротивление опоры по направленію движенія равно $C = fB$, гдѣ f коэффициентъ тренія, и B сопротивленіе опоры, нормальное къ направленію движенія. Направленіе C противоположно направленію перемѣщенія точки опоры W .

Если рѣшетка состоитъ изъ жесткихъ фигуръ съ неупругими стержнями, и если эти фигуры опираются другъ на друга неизмѣннымъ образомъ, причѣмъ всѣ стержни способны сопротивляться и растяженію и сжатію, то такую рѣшетку назовемъ *рѣшеткой съ неизмѣняемымъ (постояннымъ) сочлененіемъ*.



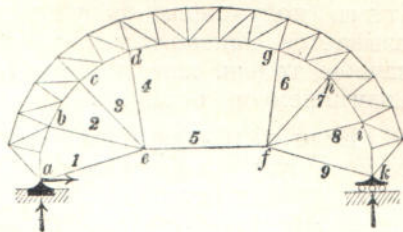
Фиг. 5.

Примѣръ измѣняемаго сочлененія показанъ на фиг. 5. На этой фигурѣ показаны двѣ сочлененныя части плоской рѣшетки, связанные шарниромъ G . Обѣ рѣшетчатые части такъ устроены, что при небольшомъ вращеніи, указанномъ стрѣлками, онѣ касаются въ точкѣ m , тогда какъ при противоположномъ вращеніи онѣ дѣйствуютъ другъ на друга въ точкѣ G . Во второмъ случаѣ обѣ точки m можно разсматривать какъ два различныхъ узла и составить для нихъ 4 условія равновѣсія. Въ первомъ случаѣ онѣ образуютъ одинъ узелъ, для котораго можно составить только два условія равновѣсія.

Измѣняемое сочлененіе получится также въ томъ случаѣ, когда рѣшетка имѣетъ стержни, способные сопротивляться въ одномъ только направленіи, напр., цѣпи или канаты, которые могутъ сопротивляться только растяженію;

или же стойки, опирающіяся на шарнирные узловые болты полуцилиндрическими поверхностями; эти стойки могутъ сопротивляться только сжатію.

Важный примѣръ подобнаго рода представляетъ рѣшетчатая балка съ перекрестными диагоналями, изслѣдованная въ I томѣ (выпускъ IV, § 38). Въ дополненіе къ теоріи этихъ фермъ слѣдуетъ добавить, что иногда во всѣхъ или въ нѣкоторыхъ панеляхъ обѣ диагонали могутъ быть напряжены одновременно; вслѣдствіе этого ферма будетъ статически неопредѣлима; но точныя величины этихъ напряженій всегда очень мало отличаются отъ ранѣ найденныхъ и поэтому въ точномъ расчетѣ нѣтъ необходимости. Другой примѣръ представленъ на фиг. 6. Эта плоская рѣшетка вообще пять разъ статически неопредѣлима, потому что она имѣетъ 36 узловъ и 74 стержня, т. е. число стержней на 5 больше, чѣмъ число уравнений $2 \cdot 36 - 3 = 69$ (гдѣ 3 = числу неизвѣстныхъ сопротивленій опоръ) *). Если стержни 1—9 могутъ сопротивляться только растяженію, и если рѣшетку такъ нагрузить, что стержни 2 и 3 не будутъ напряжены, то для разсматриваемаго рода нагрузки она будетъ только трижды статически неопредѣлима. Если стержни 5, 7 и 8 не будутъ напряжены, то стержни 1, 4, 6, 9 не будутъ также принимать участія въ сопротивленіи, потому что иначе нельзя будетъ составить условій равновѣсія для узловъ *e* и *f*; рѣшетка обратится тогда въ статически опредѣлимую.



Фиг. 6.

При изслѣдованіи рѣшетокъ съ измѣняемымъ сочлененіемъ и измѣняемыми опорами можно встрѣтить большія затрудненія, такъ какъ часто бываетъ невозможно узнать, какіе изъ стержней и при какой именно нагрузкѣ будутъ сопротивляться только сжатію или только растяженію, а также какіе шарниры въ самой рѣшеткѣ или опорные шарниры дадутъ опредѣленный родъ сопротивленія; все это можно узнать только путемъ опыта.

6. Для рѣсетки съ неизмѣняемымъ сочлененіемъ и неизмѣняемыми опорами числа k, r, a (см. стр. 13), затѣмъ величины z, μ, ν , входящія въ уравненіе (9), не зависятъ отъ рода нагрузки. Если на рѣсетку дѣйствуютъ одинъ разъ причины P', t', δ_w' , послѣ этого причины P'', t'', δ_w'' , и первому случаю соответствуетъ значеніе искомой неизвѣстной Z' , а послѣднему значеніе Z'' , то получимъ:

$$Z' = z_1 P'_1 + z_2 P'_2 + \dots + \mu_1 t'_1 + \mu_2 t'_2 + \dots + \nu_1 \delta_w' + \nu_2 \delta_w' + \dots$$

$$Z'' = z_1 P''_1 + z_2 P''_2 + \dots + \mu_1 t''_1 + \mu_2 t''_2 + \dots + \nu_1 \delta_w'' + \nu_2 \delta_w'' + \dots$$

При воздѣйствіи же на рѣсетку причинъ $P = P' + P''$,

$t = t' + t''$, $\delta_w = \delta_w' + \delta_w''$ получимъ:

$$Z = z_1 (P'_1 + P''_1) + z_2 (P'_2 + P''_2) + \dots + \mu_1 (t'_1 + t''_1) + \mu_2 (t'_2 + t''_2) + \dots + \nu_1 (\delta_w' + \delta_w'') + \nu_2 (\delta_w' + \delta_w'') + \dots$$

*) Эту ферму можно разсматривать, какъ состоящую изъ одной статически опредѣленной сочлененной части и 9 стержней (1 до 9). Тогда получимъ по № 150 (Выпускъ III, томъ I): $2 (g' + 2g'' + 3g''' + \dots) + r + a = 2 \cdot 0 + 9 + 3 = 12$, дальше $35 + 2k = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$. Такъ какъ $12 - 7 = 5$, то ферма пять разъ статически неопредѣлима.

а вмѣстѣ съ этимъ имѣемъ

$$Z = Z' + Z''.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при отыскиваніи напряженій S и сопротивленій опоръ, дѣйствующихъ по опредѣленнымъ направленіямъ, а также и проекцій перемѣщеній узловъ по опредѣленнымъ направленіямъ можно находить влияние каждой причины раздѣльно, и затѣмъ полученные результаты сложить;—этотъ важный законъ называется *закономъ сложения отдѣльныхъ дѣйствій*. Онъ имѣетъ значеніе только для рѣшетокъ съ неизмѣняемымъ сочлененіемъ и неизмѣняемыми опорами.

Если въ рѣшеткѣ со стержнями, сопротивляющимися только какому нибудь роду напряженій, при опредѣленномъ состояніи нагрузки удалить стержни безъ напряженій, то къ остальной рѣшеткѣ можно примѣнить только что приведенный законъ.

Приэтомъ можетъ случиться, что отдѣльныя причины могутъ вызвать въ стержнѣ, который способенъ сопротивляться только {растяженію}, напряжение S {отрицательное}. Необходимо только соблюсти условіе, чтобы сумма всѣхъ отдѣльныхъ S получила {положительное} значение. Этотъ законъ можно также примѣнить и къ рѣшеткѣ съ измѣняемыми опорами при опредѣленномъ, конечно, состояніи нагрузки. Для этого придется сначала опредѣлить какого рода будутъ опоры для данной нагрузки, и затѣмъ найденный родъ опоръ принять при опредѣленіи влияния отдѣльныхъ причинъ.

Это правило распространяется на опоры рѣшетки, а также на шарниры ея отдѣльныхъ частей.

в. Законъ возможныхъ перемѣщеній. Уравненія работы. Законъ Клапейрона.

7. Для вывода простыхъ отношеній между измѣненіями Δs длины стержней и перемѣщеніями узловъ рѣшетки, зависящими отъ тѣхъ же причинъ, умножимъ уравненіе, выведенное на стр. 11 $\Delta s_{ik} = (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} + (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik}$ на величину напряженія, которое могло бы появиться въ стержнѣ $i-k$ при дѣйствіи какой нибудь воображаемой нагрузки; это напряженіе обозначимъ буквой \overline{S}_{ik} , въ отличіе отъ *дѣйствительнаго* напряженія S_{ik} . Затѣмъ напомнимъ подобныя уравненія для всѣхъ стержней, сложимъ ихъ и получимъ.

$$\sum \overline{S}_{ik} \Delta s_{ik} = \sum [\overline{S}_{ik} (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + \overline{S}_{ik} (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} + \overline{S}_{ik} (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik}],$$

а это уравненіе можно написать иначе:

$$(10) \quad \Sigma \bar{S}_{ik} \Delta s_{ik} = - \Sigma [(\bar{S}_{ik} \cos \alpha_{ik} \Delta x_i + \bar{S}_{ik} \cos \beta_{ik} \Delta y_i + \bar{S}_{ik} \cos \gamma_{ik} \Delta z_i) + \\ + \bar{S}_{ki} \cos \alpha_{ki} \Delta x_k + \bar{S}_{ki} \cos \beta_{ki} \Delta y_k + \bar{S}_{ki} \cos \gamma_{ki} \Delta z_k],$$

потому что $\cos \alpha_{ki} = -\cos \alpha_{ik}$, $\cos \beta_{ki} = -\cos \beta_{ik}$, $\cos \gamma_{ki} = -\cos \gamma_{ik}$,

$$а \quad \bar{S}_{ki} = \bar{S}_{ik}.$$

Разсмотримъ фиг. 7, въ которой \bar{S} считаются силами, дѣйствующими въ узловыхъ точкахъ и замѣняющими удаленный стержень ik .

Правая часть уравненія (10) составляется такъ: разложимъ силу \bar{S}_{ik} , дѣйствующую въ узлѣ i , на составляющія параллельно осямъ x , y , z : $\bar{S}_{ik} \cos \alpha_{ik}$, $\bar{S}_{ik} \cos \beta_{ik}$, $\bar{S}_{ik} \cos \gamma_{ik}$; умножимъ эти силы по порядку на проекціи перемѣщеній Δx_i , Δy_i , Δz_i ихъ точекъ приложенія; поступимъ такимъ же образомъ со всѣми силами \bar{S} и затѣмъ сложимъ всѣ эти произведенія. Располагая теперь полученную сумму по порядку узловыхъ точекъ и обозначая номеръ произвольнаго узла буквой — m , получимъ уравненіе (въ лѣвой части уравненія знакъ ik можно отбросить):

$$(11) \quad \Sigma \bar{S} \Delta s = - \Sigma (\Delta x_m \Sigma_m \bar{S} \cos \alpha + \Delta y_m \Sigma_m \bar{S} \cos \beta + \Delta z_m \Sigma_m \bar{S} \cos \gamma)$$

въ которомъ суммы $\Sigma_m \bar{S} \cos \alpha$, $\Sigma_m \bar{S} \cos \beta$, $\Sigma_m \bar{S} \cos \gamma$ распространяются на всѣ напряженія \bar{S} , дѣйствующія въ узлѣ m .

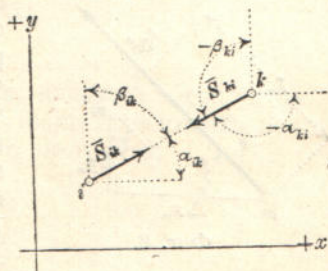
Внѣшнія силы *воображаемаго* состоянія нагрузки обозначимъ буквой Q_m (въ отличіе отъ дѣйствительныхъ внѣшнихъ силъ Q_m) онѣ образуютъ съ осями x , y , z углы ξ_m , η_m , ζ_m . Сдѣлаемъ предположеніе, что между силами Q и напряженіями \bar{S} должно существовать равновѣсіе.

Для узловой точки m получаемъ условія:

$$(12) \quad \begin{cases} \bar{Q}_m \cos \xi_m + \Sigma_m \bar{S} \cos \alpha = 0 \\ \bar{Q}_m \cos \eta_m + \Sigma_m \bar{S} \cos \beta = 0 \\ \bar{Q}_m \cos \zeta_m + \Sigma_m \bar{S} \cos \gamma = 0; \end{cases}$$

уравненіе (11) обратится въ слѣдующее:

$$\Sigma \bar{Q}_m (\Delta x_m \cos \xi_m + \Delta y_m \cos \eta_m + \Delta z_m \cos \zeta_m) = \Sigma \bar{S} \Delta s.$$



Фиг. 7.

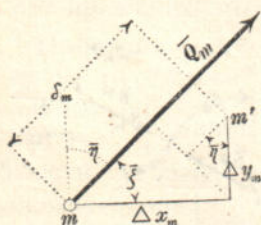
Это уравнение можетъ быть написано короче, такъ какъ проекція δ_m дѣйствительнаго перемѣщенія mm' узла m на направленіе воображаемой силы $\overline{Q_m}$ выражается формулой (фиг. 8):

$$\delta_m = \Delta x_m \cos \bar{\xi}_m + \Delta y_m \cos \bar{\eta}_m + \Delta z_m \cos \bar{\zeta}_m.$$

Тогда получимъ уравненіе:

$$(13) \quad \Sigma \overline{Q_m} \delta_m = \Sigma \overline{S} \Delta s,$$

въ которомъ перемѣщеніе δ_m будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, направлено ли оно въ ту же сторону, что и сила Q_m , или въ противоположную (фиг. 8).



Фиг. 8.

Произведеніе $\overline{Q_m} \delta_m$ выражаетъ ту механическую работу, которую производитъ сила Q_m , если ея точка приложенія m перемѣстится по направленію Q_m на величину δ_m . Такъ какъ это перемѣщеніе происходитъ отъ причинъ, которыя совершенно независятъ отъ силъ Q_m , то δ_m можно назвать *возможнымъ перемѣщеніемъ точки приложенія m силы Q_m* , а произведеніе $\overline{Q_m} \delta_m$ *возможной работой* силы Q_m . Точно также выраженіе $(-\overline{S_{ik}} \Delta s_{ik})$ обозначаетъ возможную работу двухъ силъ $\overline{S_{ik}}$, приложенныхъ въ узлахъ i и k , равныхъ и прямо противоположныхъ (фиг. 7), и Δs_{ik} возможное взаимное перемѣщеніе точекъ приложенія этихъ силъ.

Уравненіе

$$\Sigma \overline{Q_m} \delta_m - \Sigma \overline{S} \Delta s = 0$$

выражаетъ законъ, извѣстный подъ именемъ *закона возможныхъ скоростей* (или лучше: *закона возможныхъ перемѣщеній*), который читается такъ: *сумма возможныхъ работъ всѣхъ внешнихъ и внутреннихъ силъ \overline{Q} и \overline{S} , приложенныхъ къ узламъ, для случая весьма малыхъ деформаций рѣшетки равна нулю.*

Этимъ закономъ въ примѣненіи къ расчету рѣшетки впервые воспользовался Mohr.

Произведеніе $(-\overline{S_{ik}} \Delta s_{ik})$ называется также *возможной работой деформации* стержня s_{ik} , находящагося подъ дѣйствіемъ двухъ силъ \overline{S} , а выраженіе $\Sigma \overline{S} \Delta s$ называется *возможной работой деформации рѣшетки*. Уравненіе (13) читается такъ: *возможная работа внешнихъ силъ равна возможной работѣ деформации рѣшетки.*

Примѣненіе этого закона къ дѣйствительному состоянію нагрузки и къ дѣйствительному состоянію деформации даетъ уравненіе:

$$(14) \quad \Sigma Q_m \delta_m = \Sigma S \Delta s,$$

гдѣ δ_m обозначаетъ уже дѣйствительный путь узла m въ направленіи Q_m .

Уравнения (13) и (14) можно назвать также *условіями работы* или *уравнениями работы*; такъ, напр., часто употребляемое уравненіе (13) будемъ называть кратко *уравненіемъ работъ для состоянія нагрузки* (Q), причемъ будемъ подразумѣвать, что дѣло идетъ о дѣйствительной деформации рѣшетки.

8. Для послѣдующаго изложенія важно опредѣлить механическую работу A , произведенную внѣшними силами Q , и именно для того случая, когда рѣшетка находится сначала въ ненапряженномъ состояніи и не подвергается измѣненіямъ температуры. Внѣшнія и внутреннія силы пусть возрастаютъ постепенно отъ нуля до ихъ конечныхъ значеній Q и S . Пусть Q_x и S_x — одновременныя промежуточные значенія этихъ силъ; пусть въ тотъ промежутокъ времени, когда дѣйствуютъ Q_x и S_x , перемѣщенія δ и Δs получаютъ приращенія $d\delta$ и $d(\Delta s)$; тогда по уравненію (13) получимъ:

$$\Sigma Q_x d\delta = \Sigma S_x d\Delta s;$$

подобное уравненіе можно написать для каждого безконечно малаго промежутка времени, на которые можно разложить всю продолжительность движенія. Отсюда можно получить:

$$\left(\text{при } \Delta s = \frac{Ss}{EF} \right):$$

$$\begin{aligned} (15) \quad \Sigma \int_0^Q Q_x d\delta &= \Sigma \int_0^S S_x d\Delta s = \Sigma \int_0^S S_x \frac{dS_x s}{EF} = \Sigma \frac{S_x^2 s}{2EF} = \\ &= \frac{1}{2} \Sigma S \Delta s. \end{aligned}$$

Такъ какъ по ур. (14)

$$\frac{1}{2} \Sigma S \Delta s = \frac{1}{2} \Sigma Q_m \delta_m,$$

то для искомой работы $A = \Sigma \int_0^Q Q_x d\delta$ получимъ выраженіе:

$$(16) \quad \boxed{A = \frac{1}{2} \Sigma Q_m \delta_m,}$$

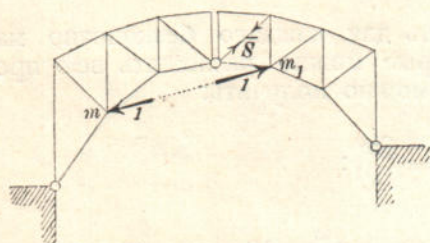
это уравненіе выражаетъ законъ, указанный впервые Клапейрономъ, который читается такъ:

Если къ рѣшѣткѣ, находившейся сначала въ ненапряженномъ состояніи и не подвергающейся измѣненіямъ температуры, будутъ приложены внѣшнія силы, которыя возрастаютъ постепенно отъ

нуля, то механическая работа внешнихъ силъ не зависитъ отъ закона, по которому эти силы возрастаютъ, а также не зависитъ отъ порядка, по которому будутъ приложены къ рѣшеткѣ внешнія силы; эта работа всегда равна половинѣ той, которую произвели бы всѣ силы Q въ теченіи всей деформации, если бы силы сохраняли свою конечную величину.

с. Примѣненіе уравненія $\Sigma \bar{Q} \delta = \Sigma \bar{S} \Delta s$ къ статически опредѣлимой рѣшеткѣ.

9. Положимъ, что измѣненія Δs длины стержней s статически опредѣлимой рѣшетки будутъ извѣстны: пусть будутъ даны также перемѣшенія опорныхъ точекъ, происходящія отъ осѣданія устоевъ. Разрѣшимъ слѣдующія задачи:



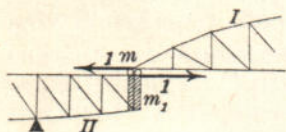
Фиг. 9.

1 задача. Опредѣлимъ отръзокъ δ_m , на который измѣняется разстояніе двухъ узловыхъ точекъ m и m_1 . Приложимъ къ m и m_1 двѣ противоположно другъ другу направленные силы, равныя единицѣ (фиг. 9); направленіе стрѣлокъ выберемъ такъ, чтобы вслѣдствіе увеличенія разстоянія mm_1 на δ_m могла получиться положительная возможная работа $1 \cdot \delta_m$. Помощью условій равновѣсія опредѣлимъ проис-

шедшія отъ этихъ силъ сопротивленія опоръ \bar{C} и напряженія \bar{S} и для этого воображаемаго состоянія нагрузки напомнимъ уравненіе работы $\Sigma \bar{Q} \delta = \Sigma \bar{S} \Delta s$. Буквой \bar{L} обозначимъ возможную работу силъ \bar{C} тогда получимъ:

$$(17) \quad 1 \cdot \delta + \bar{L} = \Sigma \bar{S} \Delta s,$$

изъ котораго δ_m опредѣлится непосредственно. Обѣ силы единицы, дѣйствующія въ m и m_1 , можно (по Mohr'у) назвать единичной нагрузкой пары точекъ m и m_1 , а δ_m взаимнымъ перемѣщеніемъ пары точекъ m и m_1 .

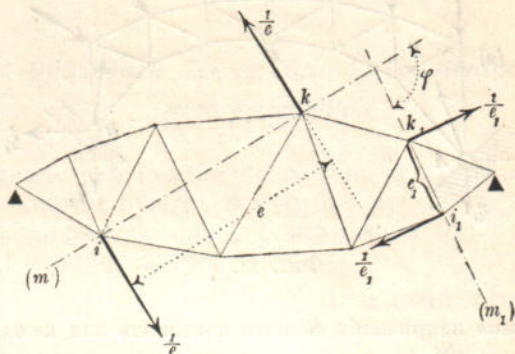


Фиг. 10.

Если m будетъ закрѣпленной точкой, лежащей внѣ рѣшетки, то уравненіе (17) дастъ перемѣшеніе δ_m узла m въ направленіи $m_1 m$, т. е. проекцію пути узла m на направленіе $m_1 m$, (фиг. 10 представляетъ тотъ случай, когда двѣ точки m , m_1 лежатъ сначала на одной вертикали, одна надъ другой; это часть балки Гербера, независимая ферма которой (I) имѣетъ въ точкѣ m подвижную опору).

Положимъ, задана такая задача: Найти горизонтальное перемѣшеніе δ_h средняго шарнира G трехшарнирной арочной фермы для состоянія нагрузки, показаннаго на фиг. 11. Вслѣдствіе упругости опоръ опорные шарниры A и B

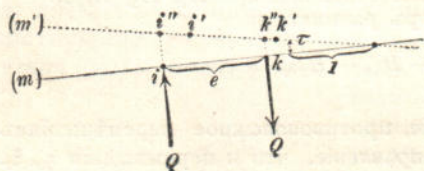
2 задача. Опредѣлимъ измѣненіе δ_m угла φ между двумя прямыми (m) и (m_1) , проведенными черезъ узлы i и k , i_1 и k_1 плоской рѣшетки, фиг. 13. Чтобы получить δ_m , примѣнимъ уравненіе $\Sigma Q\delta = \Sigma \bar{S}\Delta s$ къ представленному на фиг. 13 воображаемому состоянію нагрузки и дѣйствительному состоянію перемѣщеній.



Фиг. 13.

Примемъ, что въ точкахъ i и k приложены двѣ силы равныя $\frac{1}{e}$ *), направленные по перпендикулярамъ къ прямой (m) въ разныя стороны, а въ точкахъ i_1 и k_1 приложены силы $\frac{1}{e_1}$, направленные по перпендикулярамъ къ прямой m_1 также въ разныя стороны. Направленіе этихъ силъ надо такъ выбрать, чтобы обѣ пары силъ (моменты которыхъ равны $\frac{1}{e} \cdot e = 1$ и $\frac{1}{e_1} \cdot e_1 = 1$), вслѣд-

ствие увеличенія угла φ на δ_m , произвели положительную работу $= 1 \cdot \delta_m$. Значеніе этой работы получается изъ слѣдующаго разсужденія. Пусть прямая (m) , въ точкахъ которой i и k приложены двѣ силы, образующія пару силъ, перпендикулярныхъ къ (m) , фиг. 14, повернется на весьма малый уголъ τ и придетъ въ положеніе (m') ; точки i и k' будутъ обозначать окончательное положеніе точекъ i и k . При опредѣленіи работы пары силъ примемъ, что i и k опишутъ дуги круговъ ii'' и kk'' , общий центръ которыхъ лежитъ въ точкѣ пересѣченія прямыхъ (m) и (m') . Послѣ этого перемѣстимъ i'' и k'' въ положеніе i' и k' . Въ первой части этого весьма малаго перемѣщенія пара силъ, моментъ которой равняется $M = Qe$, произведетъ работу $Q\overline{ii''} - Q\overline{kk''} = Qe\tau = M\tau$, а во второй части произве-



Фиг. 14.

*) $\frac{1}{e} = 1 \frac{1}{e} = \text{единица силъ} \times \frac{\text{единица длины}}{e}$

денная работа = 0, потому что перемѣщенія $i''i'$ и $k''k'$ перпендикулярны къ Q . Въмѣстѣ съ этимъ $M\tau$ представляетъ общую работу пары силъ. Итакъ, если прямая (m) и (m_1), фиг. 13, повернутся на углы τ и τ_1 по направленію вращенія паръ силъ, приложенныхъ въ i и k и въ i_1 и k_1 (моменты которыхъ = 1), то работа, произведенная обѣими парами = $1 \cdot \tau + 1 \cdot \tau_1 = 1 \cdot \delta_m$, такъ какъ $\tau + \tau_1 = \delta_m$, гдѣ δ_m есть длина дуги радиуса = 1.

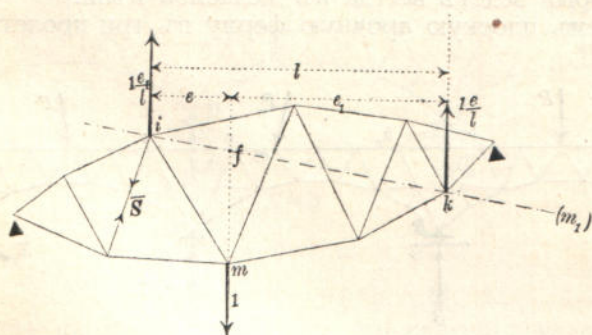
Если обозначим теперь возможную работу опорных сопротивлений, вызываемых объёмами парами сил, через \bar{L} , а напряжения для воображаемого состояния нагрузки через \bar{S} , то для определения δ_m получим уравнение, одинаковое по формѣ съ ур. (17):

$$\partial_m + \overline{L} = \Sigma \overline{S} \Delta s.$$

Если i_1 и k_1 будут закреплёнными точками, лежащими вне рѣ-
шетки, то данное уравненіе опредѣлитъ уголъ вращенія δ_m пря-
мой (m).

Измѣненіе δ_m угла φ на фиг. 13 назовемъ *взаимнымъ вращеніемъ пары прямыхъ* (m) и (m_1), а четыре силы $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e_1}\right)$, приложенныя въ i, k, i_1, k_1 , будемъ называть *единичной нагрузкой пары прямыхъ* (m) (m_1). Эти опредѣленія согласуются съ прежде выведенными относительно пары точекъ m, m_1 (стр. 20).

10. При решении обеих задач в № 9 мы поступали по следующему способу. Для определения перемещения или вращения δ_m , мы предполагали, что решетка так нагружена, что данные грузы производят возможную работу $1 \cdot \delta_m$. Для этого воображаемого состояния нагрузки и для действительного состояния перемещения мы составили условие $\Sigma \bar{Q} \delta_m = \Sigma S \Delta s$ и получили уравнение, из которого непосредственно определяется δ_m .



Фиг. 15.

По этому правилу можно теперь решить различные задачи. Положим, требуется определить для плоской решетки изменение δ_m по определенному направлению разстояния mf —узла m от прямой (m_i) , проходящей через 2 узла i и k ; нагружаем решетку, как показано на фиг. 15. Груз 1 , приложенный к узлу m , имеет направление fm ; силы $1 \frac{e_i}{l}$ и $1 \frac{e}{l}$, действующие в i и k по на-

правленіямъ, параллельнымъ fm , имѣютъ равнодѣйствующую совпадающую съ прямой mf , равную единицѣ и направленную отъ m къ f . Общая возможная работа этихъ трехъ грузовъ $= 1 \cdot \delta_m$; вычисливъ напряжения \bar{S} и сопротивленія опоръ, вызываемыя этими грузами (сопротивленія опоры могутъ произвести работу \bar{L}), получимъ уравненіе работы:

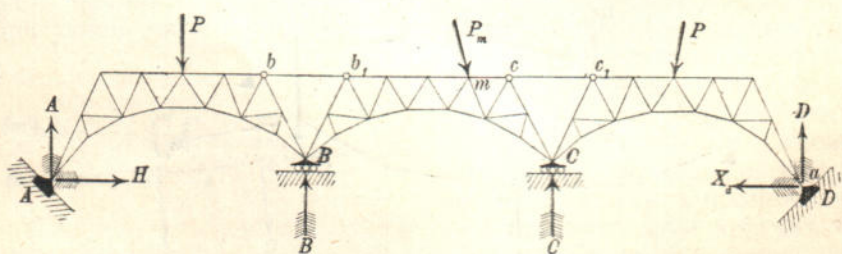
$$1 \cdot \delta_m + \bar{L} = \Sigma \bar{S} \Delta s,$$

которое имѣетъ ту же форму, что и уравненіе (17). По вышеописанному правилу можно рѣшать еще болѣе разнообразныя задачи для рѣшетокъ въ пространствѣ. Мы удовлетворимся однимъ примѣромъ. Положимъ, требуется найти измѣненіе длины перпендикуляра, опущеннаго изъ узловой точки m на плоскость $[m_1]$, которая опредѣляется тремя узловыми точками h, i, k ; подошва перпендикуляра будетъ f . Приложимъ къ m грузъ, равный единицѣ, направленный отъ f къ m ; пусть въ узлахъ h, i, k дѣйствуютъ грузы, перпендикулярные къ плоскости $[m_1]$; равнодѣйствующая этихъ грузовъ, равная единицѣ, совпадаетъ съ прямой mf и имѣетъ направленіе отъ m къ f . Общая работа четырехъ грузовъ будетъ $= 1 \cdot \delta_m$. Величина δ_m опредѣлится по вышеприведенному способу непосредственнымъ вычисленіемъ.

d. Примѣненіе уравненія $\Sigma Q\delta = \Sigma \bar{S} \Delta s$ къ статически неопредѣлимымъ рѣшеткамъ.

11. Произведемъ расчетъ статически неопредѣлимой рѣшетки путемъ рѣшенія простой задачи, но при этомъ примѣнимъ общій способъ, который ведетъ всегда къ желаемой цѣли.

Изслѣдуемъ плоскую арочную ферму въ три пролета (фиг. 16).

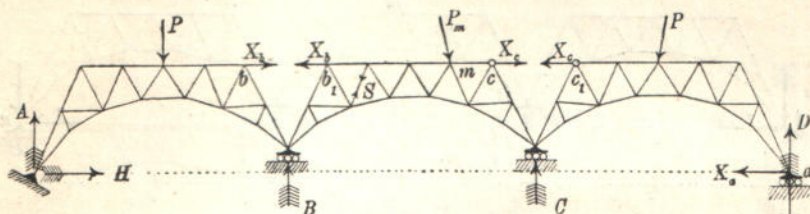


Фиг. 16.

Въ A и D находятся неподвижныя опоры, въ B и C подвижныя. Въ опорныхъ точкахъ B и C , двигающихся по горизонтальной прямой, появляются вертикальныя сопротивленія B и C . Вертикальныя и горизонтальныя составляющія опорныхъ сопротивленій въ A и D пусть будутъ A и H , D и X_a .

Число неизвѣстныхъ силъ въ опорахъ $= 6$, число стержней $= 83$, число узловыхъ точекъ $= 43$. Такъ какъ $6 + 83 > 2 \cdot 43$, то рѣшетка

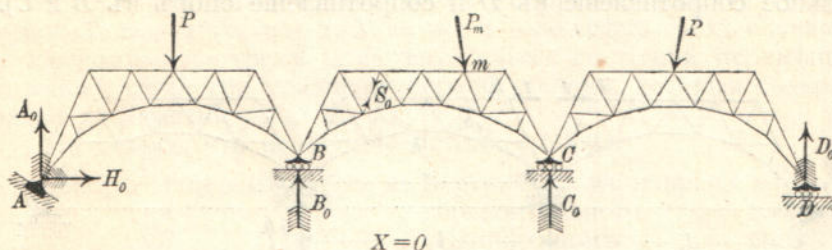
по № 150 (Выпуск III, том I) трижды статически неопредѣлима, потому что $6 + 83 - 2 \cdot 43 = 3^*$). Если будутъ даны три неизвѣстныя, которыя требуется опредѣлить, напр., опорное сопротивление X_a (точка приложенія въ шарнирѣ a) и напряжения X_b и X_c обоихъ стержней bb_1 и cc_1 , то остальные напряжения и сопротивления опоръ опредѣлятся на основаніи условій равновѣсія. Для этой цѣли превращаютъ рѣшетку въ статически опредѣлимую, устраняя оба стержня bb_1 и cc_1 и обращая неподвижную опору D въ подвижную; затѣмъ, для того, чтобы состояніе напряженія рѣшетки не измѣнилось, прибавляютъ напряжения X_b , X_c , какъ внѣшнія силы. Къ опорѣ a прикладываютъ также горизонтальную силу X_a , фиг. 17.



Фиг. 17.

Силы X_a , X_b , X_c на фиг. 17 временно причисляются къ грузамъ.

Представленную на фиг. 17 статически опредѣлимую рѣшетку назовемъ *главной рѣшеткой* разсматриваемой фермы; ея стержни называются *главными стержнями*, или также *необходимыми стержнями*, тогда какъ стержни bb_1 и cc_1 , фиг. 16, называются *лишними стержнями*. Равнымъ образомъ различаемъ опорныя сопротивления *необходимыя* и *лишнія*. Лишнее опорное сопротивление на фиг. 16



Фиг. 18.

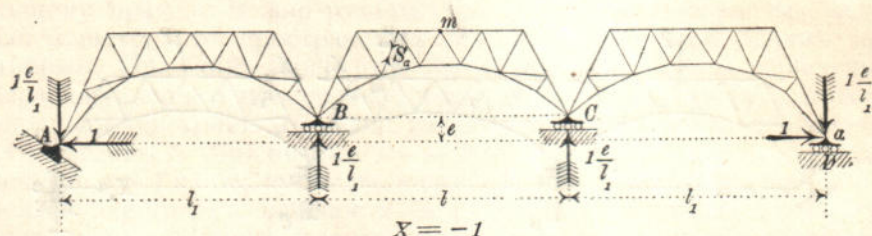
есть X_a . Такъ какъ все уравненія, выражающія условия равновѣсія, первой степени, то напряженіе S въ какомъ нибудь главномъ стержнѣ будетъ линейной функціей силъ P , X_a , X_b , X_c ; его можно представить въ формѣ:

(18)

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c.$$

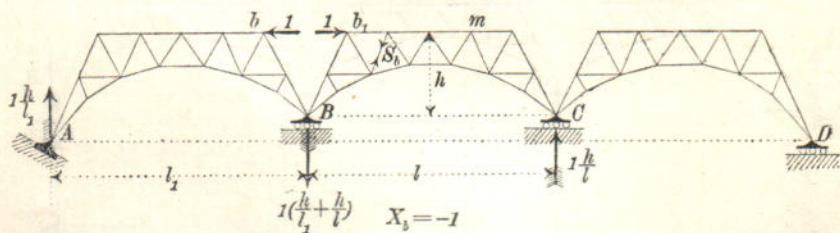
*) Можно разложить ферму также на три сочлененныя части и 2 стержня (bb_1 и cc_1) и примѣнить уравненіе III, № 150 (Выпуск III, том I).

гдѣ S_a , S_b , S_c не зависятъ ни отъ грузовъ P , ни отъ силъ X , величина же S_o есть функция первой степени данныхъ грузовъ P . Членъ S_o представляетъ то напряженіе, которое появляется въ разсматриваемомъ стержнѣ если X_a , X_b , X_c равны нулю, а на главную сѣтъ дѣйствуютъ грузы P ; это состояніе нагрузки, которое, ради краткости, назовемъ „состояніемъ $X=0$ “, показано на фиг. 18. S_o есть то напряженіе, которое вызывается въ разсматриваемомъ стержнѣ, если всѣ грузы P и величины X_b , X_c равны нулю, а $X_a = -1$. Это состояніе нагрузки можно назвать „состояніемъ $X_a = -1$ “, оно представлено на фиг. 19. Горизонтальный грузъ $X_a = -1$, прило-



Фиг. 19.

женный въ точкѣ a , вызываетъ въ опорахъ главной рѣшетки сопротивленія, величина которыхъ показана на фиг. 19. (Сопротивленіе въ A должно имѣть направленіе BA , а горизонтальная составляющая его должна равняться 1; поэтому вертикальная составляющая его имѣетъ величину $1 \frac{e}{l_1}$. Такимъ же путемъ получимъ вертикальное сопротивленіе въ D и сопротивленіе опоръ въ B и C).



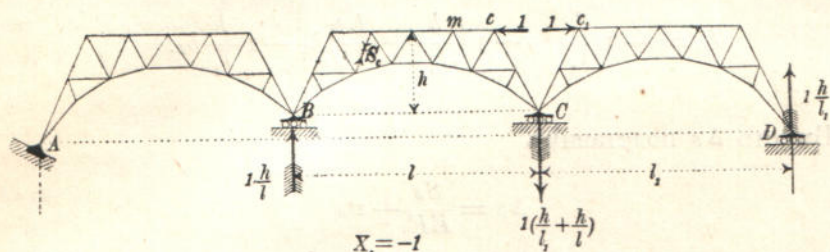
Фиг. 20.

Подобно предыдущему величины S_b и S_c можно разсматривать какъ напряженія, соответствующія состоянію нагрузокъ: $X_b = -1$ и $X_c = -1$. Эти оба состоянія показаны на фиг. 20 и 21, гдѣ даны величины и направленія опорныхъ сопротивленій.

Для случая нагрузки, фиг. 20, стержни части рѣшетки CD не напряжены, а для случая нагрузки, фиг. 21, не напряжены стержни части рѣшетки AB . Всѣ эти напряженія S_o , S_a , S_b , S_c можно опредѣлить и по правиламъ, изложеннымъ въ I томѣ; величины S опре-

дѣлятся помощью уравненія (18); для необходимыхъ сопротивленій A, B, C, H найдемъ слѣдующія значенія:

$$(19) \quad \begin{cases} A = A_o + X_a \frac{e}{l_1} - X_b \frac{h}{l_1} \approx), \\ B = B_o - X_a \frac{e}{l_1} + X_b \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right) - X_c \frac{h}{l}, \\ C = C_o - X_a \frac{e}{l_1} - X_b \frac{h}{l} + X_c \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right), \\ D = D_o + X_a \frac{e}{l_1} - X_c \frac{h}{l_1}, \\ H = H_o + X_a. \end{cases}$$



Фиг. 21.

Задача расчета рѣшетки сводится теперь къ „опредѣленію статически неопредѣлимыхъ величинъ X_a, X_b, X_c “; эту же задачу можно рѣшить простымъ путемъ, примѣняя уравненіе работы $\Sigma \bar{Q} \delta = \Sigma \bar{S} \Delta s$ къ каждому изъ трехъ воображаемыхъ состояній нагрузки: $X_a = -1$; $X_b = -1$; $X_c = -1$ и — во всѣхъ трехъ случаяхъ — къ каждому изъ трехъ дѣйствительныхъ состояній перемѣщеній. Получимъ тогда три уравненія первой степени, которыя содержатъ только неизвѣстныя X_a, X_b, X_c .

Положимъ, что вслѣдствіе осѣданія опоръ

точка опоры A перемещается въ вертикальномъ направл. внизъ на δ_A

" " $\frac{A}{\delta}$ " " горизонтальномъ " влѣво на δ_H

" " *B* " " вертикальномъ " внизъ на δ_B

" " С " " вертикальномъ " внизъ на δ_c

" " *D* " " вертикальномъ " внизъ на δ_D

[illegible]

тогда уравнение работы для состояния $X_a = -1$ (фиг. 19) будет:

$$(I) \quad L_a + 1 \cdot \partial_a = \Sigma S_a \Delta s, \text{ где}$$

$$L_a = \mathbf{I} \cdot \frac{e}{l} (\partial_A - \partial_B - \partial_C + \partial_D) + \mathbf{I} \cdot \partial_H$$

^{a)} Состояніямъ $X_a = -1$; $X_b = -1$; $X_c = -1$ должно соответствовать:
 $A = -\frac{e}{l_1}$; $A = +\frac{h}{l_1}$; $A = 0$. Ср. фиг. 19, 20, 21. Такимъ же образомъ полу-
 чимъ выраженія B , C , D , H .

означаетъ возможную работу сопротивленій опоръ статически опредѣлимой главной рѣшетки.

Для состоянія $X_b = 1$ получимъ, если черезъ δ_b обозначить измѣненіе длины s_b лишняго стержня bb_1 :

$$(II) \quad L_b + 1 \cdot \delta_b = \Sigma S_b \Delta s, \text{ гдѣ}$$

$$L_b = -1 \frac{h}{l_1} \delta_A + 1 \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right) \delta_B - 1 \frac{h}{l_1} \delta_C =$$

возможной работѣ опорныхъ сопротивленій; для состоянія $X_c = -1$ (если $\delta_c =$ измѣненію длины стержня $cc_1 = s_c$) получимъ:

$$(III) \quad L_c + 1 \cdot \delta_c = \Sigma S_c \Delta s, \text{ гдѣ}$$

$$L_c = -1 \frac{h}{l_1} \delta_B + 1 \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right) \delta_C - 1 \frac{h}{l_1} \delta_D.$$

Вмѣсто Δs подставимъ

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon ts$$

и обозначимъ ради краткости

$$\rho = \frac{s}{EF};$$

тогда уравненія I, II, III, принимая во вниманіе урavn. (18), обратимъ въ слѣдующія:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_a + \delta_a = \Sigma S_a S_a \rho - X_a \Sigma S_a^2 \rho - X_b \Sigma S_a S_b \rho - X_c \Sigma S_a S_c \rho + \Sigma S_a \varepsilon ts \\ L_b + \delta_b = \Sigma S_b S_a \rho - X_a \Sigma S_b S_a \rho - X_b \Sigma S_b^2 \rho - X_c \Sigma S_b S_c \rho + \Sigma S_b \varepsilon ts \\ L_c + \delta_c = \Sigma S_c S_a \rho - X_a \Sigma S_c S_a \rho - X_b \Sigma S_c S_b \rho - X_c \Sigma S_c^2 \rho + \Sigma S_c \varepsilon ts. \end{array} \right.$$

Знаки суммъ въ правой части уравненій распространяются на всѣ *необходимые стержни*.

Если обозначить теперь буквами F_b, F_c поперечныя сѣченія обоихъ лишнихъ стержней, E_b, E_c коэффициенты упругости, t_b, t_c измѣненія температуръ, $\varepsilon_b, \varepsilon_c$ относительныя удлинненія для $t = 1^\circ$, то въ уравненія (20) надо подставить:

$$(21) \quad \delta_b = \frac{X_b s_b}{E_b F_b} + \varepsilon_b t_b s_b; \quad \delta_c = \frac{X_c s_c}{E_c F_c} + \varepsilon_c t_c s_c;$$

теперь мы въ состояніи вычислить неизвѣстныя X_a, X_b, X_c , въ предположеніи, что деформации опоръ извѣстны, или представляются функциями X . Последняя задача бываетъ большею частью трудно

разрѣшима, о чемъ мы уже упоминали на стр. 12. Вслѣдствіе этого, на практикѣ приходится только установить, какое вліяніе оказываютъ взаимныя перемѣщенія опорныхъ точекъ на состояніе напряженій вновь изслѣдуемой статически неопредѣлимой фермы.

Если это вліяніе существенно и вредно, то рассматриваемую ферму только тогда можно исполнить, когда рассчитываемъ получить почти неподвижныя опоры; напр. при слабомъ грунтѣ отъ нихъ придется отказаться; при установкѣ такихъ фермъ надо обратить особенное вниманіе на то, чтобы опорныя точки получили точно то положеніе, которое предполагалось расчетомъ.

Но иногда бываетъ возможно принять только частью во вниманіе деформации устоевъ (опоръ) при расчетѣ фермъ. Если напр., изображенная на фиг. 16 ферма въ B и C опирается на колонны длиною h' , и этимъ колоннамъ соотвѣтствуютъ значенія F' , E' , t' , ε' , то, пренебрегая деформацией фундаментовъ и грунта, найдемъ, что δ_B = укороченію колонны, произведенному давленіемъ B , уменьшенному на удлиненіе этой колонны вслѣдствіе возвышенія температуры, т. е.

$$\delta_B = \frac{Bh'}{E'F'} - \varepsilon' t' h',$$

а также:

$$\delta_C = \frac{Ch'}{E'F'} - \varepsilon' t' h'.$$

Теперь выразимъ B и C посредствомъ уравн. (19) черезъ X_a , X_b , X_c и разрѣшимъ окончательно уравненія (20) по тремъ неизвѣстнымъ X .

12.—Выраженія суммъ, стояція въ уравненіяхъ (20), можно обозначить болѣе простымъ способомъ, очень полезнымъ для послѣдующаго изложенія. Для этой цѣли обозначимъ буквами:

δ_{ma} — перемѣщеніе, которое получаетъ точка приложенія m какого нибудь груза P_m по направленію P_m , если на статически опредѣлимую главную рѣшетку дѣйствуетъ только нагрузка $X_a = -1$ (состояніе нагрузки фиг. 19),

δ_{mb} — тоже перемѣщеніе m въ направленіи P_m , вслѣдствіе состоянія $X_b = -1$ (фиг. 20),

δ_{mc} — тоже перемѣщеніе m въ направленіи P_m , вслѣдствіе состоянія $X_c = -1$ (фиг. 21);

дальше:

δ_{aa} — горизонтальное перемѣщеніе точки a , считаемое вправо положительнымъ, для случая, когда на статически опредѣлимую главную рѣшетку дѣйствуетъ только нагрузка $X_a = -1$,

δ_{ab} — горизонтальное перемѣщеніе a вслѣдствіе $X_b = -1$,

δ_{ac} — " " " " " " $X_c = -1$;

дальше:

δ_{ba} — взаимное перемѣщеніе пары точекъ b , b_1 , т. е. измѣненіе длины отрѣзка bb_1 для того случая, когда на статически опредѣлимую главную рѣшетку дѣйствуетъ только грузъ $X_a = -1$,

только къ перемѣщеніямъ, происшедшимъ отъ измѣненій температуръ, доставятъ слѣдующія уравненія:

$$(24) \quad \Sigma S_a \varepsilon_{ts} = 1 \cdot \delta_{at}; \quad \Sigma S_b \varepsilon_{ts} = 1 \cdot \delta_{bt}; \quad \Sigma S_c \varepsilon_{ts} = 1 \cdot \delta_{ct}.$$

Три условія (20) можно преобразовать въ слѣдующія:

$$(25) \quad \begin{cases} L_a + \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} + \delta_{at} \\ L_b + \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} + \delta_{bt} \\ L_c + \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} + \delta_{ct} \end{cases}$$

гдѣ:

$$(26) \quad \delta_{ab} = \delta_{ba}; \quad \delta_{ac} = \delta_{ca}; \quad \delta_{bc} = \delta_{cb}.$$

Уравненія (25) будутъ въслѣдствіи пригодны для многихъ случаевъ, такъ какъ перемѣщенія δ узловыхъ точекъ для большинства рѣшетокъ опредѣляются очень просто чертежемъ. Чертежи, которые доставляютъ эти перемѣщенія, мы будемъ называть въслѣдствіи *диаграммами перемѣщеній* (см. отдѣлъ I). Для опредѣленія неизвѣстныхъ X_a , X_b , X_c съ помощью уравненій (25), достаточно начертить четыре діаграммы перемѣщеній для статически опредѣлимой главной рѣшетки, первую для состоянія нагрузки $X_a = -1$, вторую для состоянія $X_b = -1$, третью для $X_c = -1$ и наконецъ четвертую для ненагруженной главной рѣшетки, подверженной только измѣненію температуры.

13.— Способъ, примѣненный въ № 9 для расчета статически неопредѣлимой рѣшетки, всегда приводить къ цѣли; по этому способу требуется опредѣлить напряженія лишнихъ стержней и лишнихъ сопротивленій опоръ съ помощью уравненій работъ вида (13). Иногда бываетъ цѣлесообразнѣе, принять сначала другія величины за неизвѣстныя, а лишніе напряженія стержней и сопротивленія опоръ представить, какъ линейныя функціи этихъ *статически неопредѣлимыхъ величинъ*. Такъ, на примѣръ, можно было бы, при изслѣдованіи фермы, фиг. 16, вмѣсто напряженій въ стержняхъ bb_1 и cc_1 принять за неизвѣстныя моменты этихъ силъ $S_{b-b_1} \cdot h$ и $S_{c-c_1} \cdot h$ относительно точекъ вращенія B и C и опредѣлить ихъ съ помощью уравненій работъ.

Итакъ вообще въ статически неопредѣлимой рѣшеткѣ въ напряженія S и сопротивленія опоръ C , дѣйствующія по опредѣленнымъ направленіямъ, можно выразить въ такой формѣ:

$$(27) \quad \begin{cases} S = S_0 - S' X' - S'' X'' - S''' X''' - \dots \\ C = C_0 - C' X' - C'' X'' - C''' X''' - \dots \end{cases}$$

гдѣ X' , X'' , $X''' \dots$ статически неопредѣлимые величины, а S_0 , S' , $S'' \dots$, C_0 , C' , $C'' \dots$ представляютъ величины, которыя не зависятъ отъ неизвѣстныхъ X . Отдѣльно S_0 и C_0 означаютъ напряженіе и сопротивленіе опоры статически опредѣлимой главной рѣшетки, въ которую переходитъ ферма,

Всѣ выраженія суммъ, входящія въ эти уравненія, простираются на *всѣ* стержни рѣшетки, *необходимые и лишніе*.

Надо обратить особенное вниманіе на послѣдній законъ. Если примѣнить, напримѣръ, уравненія (29) къ фермѣ, изслѣдованной въ № 11 и представленной на фиг. 16, и положить $X' = X_a$, $X'' = X_b$, $X''' = X_c$, то лишнему стержню bb_1 будетъ соответствовать:

$$S_0 = 0; S' = 0; S'' = -1; S''' = 0,$$

а лишнему стержню cc_1 :

$$S_0 = 0; S' = 0, S'' = 0, S''' = -1.$$

Для каждаго необходимаго стержня $S' = S_a$, $S'' = S_b$, $S''' = S_c$.

Суммы $\Sigma S''^2 \rho$, $\Sigma S''^2 \rho$, $\Sigma S''' \varepsilon ts$, $\Sigma S''' \varepsilon ts$ отличаются отъ суммъ, входящихъ въ уравн. (29): $\Sigma S_b^2 \rho$, $\Sigma S_c^2 \rho$, $\Sigma S_b \varepsilon ts$, $\Sigma S_c \varepsilon ts$ (эти послѣднія относятся только къ необходимымъ стержнямъ) на члены, соответствующіе лишнимъ стержнямъ. Такимъ образомъ:

$$\Sigma S''^2 \rho = \Sigma S''^2 \frac{s}{EF} = \Sigma S_b^2 \frac{s}{EF} + \frac{1 \cdot s_b}{E_b F_b} = \Sigma S_b^2 \rho + \frac{s_b}{E_b F_b};$$

$$\Sigma S'''^2 \rho = \Sigma S_c^2 \rho + \frac{s_c}{E_c F_c};$$

$$\Sigma S' \varepsilon ts = \Sigma S_b \varepsilon ts - 1 \cdot \varepsilon_b t_b s_b;$$

$$\Sigma S''' \varepsilon ts = \Sigma S_c \varepsilon ts - 1 \cdot \varepsilon_c t_c s_c.$$

Суммы же

$\Sigma S_0 S'' \rho = \Sigma S_0 S_b \rho$; $\Sigma S'' S''' \rho = \Sigma S_b S_c \rho$, потому что для каждаго лишняго стержня $S_0 = 0$ и, или $S'' = 0$, или $S''' = 0$, а отсюда слѣдуетъ, что во всѣхъ остальныхъ суммахъ можно замѣнить S' черезъ S_a , S'' черезъ S_b и S''' черезъ S_c .

При расчетѣ L' горизонтальную силу 1, дѣйствующую въ точкѣ опоры a , въ случаѣ нагрузки $X_a = -1$, надо причислить къ сопротивленіямъ опоръ, потому что X_a есть сопротивленіе опоры, а поэтому

$$L' = L_a + 1 \cdot \delta_a, \text{ тогда какъ } L'' = L_b \text{ и } L''' = L_c.$$

Преобразовавъ подобнымъ путемъ уравненія (29) и замѣчая, что

$$\delta_b = \frac{X_b s_b}{E_b F_b} + \varepsilon_b t_b s_b \text{ и } \delta_c = \frac{X_c s_c}{E_c F_c} + \varepsilon_c t_c s_c.$$

получимъ уравненія (20), выведенныя на стр. 28.

При примѣненіи уравненій (29) необходимо раньше всего опредѣлить суммы, зависящія отъ грузовъ P . Обыкновенно рекомендуется выбрать путь, описанный въ № 12, полагая

$$(30) \quad \Sigma S_0 S' \rho = \Sigma P_m \delta'_m; \quad \Sigma S_0 S'' \rho = \Sigma P_m \delta''_m; \text{ и т. д.,}$$

гдѣ δ'_m , δ''_m . . . означаютъ тѣ перемѣщенія, которые получаетъ точка приложенія m какого нибудь груза P_m въ направленіи P_m , если на рѣшетку дѣйствуетъ только причина $X' = -1$, или только причина $X'' = -1$, и т. д.

Всѣ остальные выраженія суммъ (не содержащія S_0) не зависятъ отъ грузовъ; ихъ нужно опредѣлить только одинъ разъ; они отыскиваются быстрее всего расчетомъ; затѣмъ вычисляемъ напряженія S' , S'' . . . , или опредѣляемъ ихъ при помощи многоуголь-

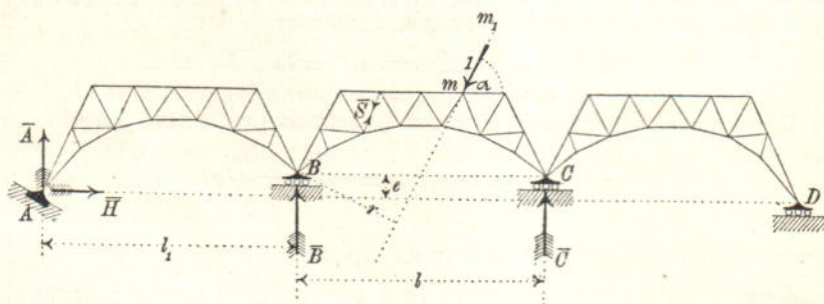
ника силъ. Но эти суммы могутъ быть разсматриваемы на основаніи № 13, какъ перемѣщенія. тогда они опредѣляются помощью простой діаграммы перемѣшеній.

14.—Если опредѣлить статически неопредѣлимые величины X по способу, описанному въ № 11 до 13, и послѣ этого вычислить напряженія S помощью уравненій (18), а также (27), то этимъ самымъ мы опредѣлимъ измѣненія Δs всѣхъ длинъ стержней s и затѣмъ уже мы будемъ въ состояніи разрѣшить всѣ задачи, данныя въ № 9 и 10, по способу, которымъ мы пользовались раньше. Этотъ способъ состоитъ въ примѣненіи уравненія $\Sigma Q_m \delta_m = \Sigma S \Delta s$ къ дѣйствительному состоянію перемѣшеній и къ воображаемому состоянію нагрузки, причемъ нагрузку надо такъ выбрать, чтобы общая возможная работа грузовъ равнялась $1 \cdot \delta_m$, гдѣ δ_m есть искомое взаимное перемѣщеніе пары точекъ m, m_1 , или искомое взаимное вращеніе пары прямыхъ и т. д.

Приэтомъ надо наблюдать, чтобы между воображаемыми внѣшними и внутренними силами \bar{Q} и \bar{S} было равновѣсіе, т. е. чтобы напряженія въ лишнихъ стержняхъ и лишнія сопротивленія опоръ равнялись нулю.

Возьмемъ, напр., арочную ферму, изображенную на фиг. 16. Отыщемъ перемѣщеніе δ_m , которое получаетъ какая нибудь узловая точка m въ средней аркѣ по направленію $m_1 m$. Перемѣшенія опорныхъ точекъ, данныя на стр. 27, должны быть также приняты во вниманіе.

Сначала обращаемъ ферму въ статически опредѣлимую, устраняя лишніе стержни и сопротивленія опоръ (фиг. 22). Послѣ этого



Фиг. 22.

прикладываемъ въ m грузъ, равный единицѣ, направленный отъ m_1 къ m , и переходимъ къ вычисленію сопротивленій A, B, \dots , вызываемыхъ этимъ грузомъ въ опорахъ главной рѣшетки. Если $m_1 m$ образуетъ съ горизонтомъ уголъ α , и если разстояніе опорной точки B отъ mm_1 равно r , то условія равновѣсія будутъ таковы:

$$\bar{H} = 1 \cdot \cos \alpha; \quad \bar{A}l = \bar{H}e = 0$$

$$\bar{C} \cdot l - 1 \cdot r = 0; \quad \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = 1 \cdot \sin \alpha,$$

а отсюда находимъ:

$$\bar{A} = 1 \cdot \frac{e \cos \alpha}{l_1}; \quad \bar{C} = 1 \cdot \frac{r}{l};$$

$$\bar{B} = 1 \cdot \left(\sin \alpha - \frac{e \cos \alpha}{l_1} - \frac{r}{l} \right) *)$$

Теперь опредѣлимъ напряжения \bar{S} , вызываемыя въ стержняхъ главной рѣшетки внѣшними силами 1, \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{H} , и напомнимъ уравненіе работы:

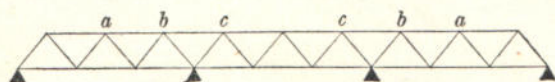
$$1 \cdot \delta_m - \bar{A} \delta_A - \bar{B} \delta_B - \bar{C} \delta_C - \bar{H} \delta_H = \Sigma \bar{S} \Delta s,$$

въ которыхъ введены *дѣйствительныя* измѣненія Δs длины стержней. Затѣмъ напомнимъ:

$$\Delta s = \frac{S s}{E F} + \varepsilon t s, \text{ гдѣ } S = S_o - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c.$$

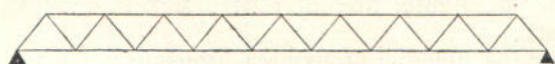
Такимъ путемъ получаемъ всегда δ_m , какъ линейную функцію грузовъ P , измѣненій температуры t , статически неопредѣлимыхъ величинъ X и перемѣщеній опорныхъ точекъ, совершающихся по опредѣленнымъ направленіямъ. Такъ какъ между X , P , t существуетъ отношеніе также первой степени, то отсюда заключаемъ, что въ случаѣ неизмѣняемаго сочлененія и неизмѣняемыхъ опоръ можно примѣнить упомянутый въ № 6 законъ сложенія отдѣльныхъ дѣйствій для всѣхъ тѣхъ величинъ δ_m , которыя можно опредѣлить посредствомъ условія вида $1 \cdot \delta_m + L = \Sigma \bar{S} \Delta s$.

15.—Укажемъ еще на то обстоятельство, что въ выборѣ лишнихъ стержней и сопротивленій опоръ мы можемъ поступать довольно произвольно, но внутри извѣстныхъ границъ. Примемъ, на примѣръ, сопротивленія обѣихъ среднихъ опоръ неразрѣзной балки (фиг. 23) за статически неопредѣлимые величины (X), тогда полу-



Фиг. 23.

чимъ главную рѣшетку, показанную на фиг. 24; это будетъ про-



Фиг. 24.

*) Совѣтуемъ читателю опредѣлить эти силы чертежомъ.

стая балка. Но можно получить главную рѣшетку, состоящую изъ трехъ отдѣльныхъ балокъ (фиг. 25), или представляющую балку



Фиг. 25.

Гербера (фиг. 26), смотря по тому, какіе стержни считаемъ за



Фиг. 26.

лишніе: оба bc или оба ab . Замѣтимъ также, что при опредѣленіи перемѣщеній δ_m надо построить другую главную рѣшетку, какъ это было сдѣлано при опредѣленіи напряженій.

е) Теорема Максвелла (Maxwell) о взаимности упругихъ деформаций и теорема Бетти (Betti).

16.—Разсмотримъ плоскую рѣшетку или рѣшетку въ пространствѣ съ неизмѣняемымъ сочлененіемъ и неизмѣняемыми опорами, лежащую на жесткихъ опорахъ (стр. 14), и предположимъ начальное состояніе безъ напряженій. Примемъ также, что температура не мѣняется. Тогда можно примѣнить законъ Клапейрона, приведенный на стр. 19, и для механической работы A внѣшнихъ силъ получимъ выраженіе, зависящее только отъ грузовъ P .

$$(31) \quad A = \frac{1}{2} \sum P \delta = \frac{1}{2} (P_a \delta_a + P_b \delta_b + \dots + P_m \delta_m + \dots),$$

гдѣ подъ $P_a, P_b, \dots, P_m, \dots$ подразумѣваются сосредоточенные грузы, а подъ $\delta_a, \delta_b, \dots, \delta_m, \dots$ дѣйствительныя перемѣщенія точекъ приложенія ихъ a, b, \dots, m, \dots по направленіямъ $P_a, P_b, \dots, P_m, \dots$.

Теперь, для дальнѣйшихъ выводовъ, можно дать буквамъ P и δ обозначеніе болѣе общее и подъ каждымъ произведеніемъ $P \delta$, входящимъ въ уравненіе, предполагать механическую работу цѣлой группы грузовъ.

Такія группы легко образовать помощью изслѣдованій, произведенныхъ въ № 9 и № 10.

Если, напримѣръ, оба груза *единица* на фиг. 9 будутъ умножены на P_m , (гдѣ подъ грузомъ *единица* или P_m надо понимать число), то получимъ одну группу грузовъ, работа которой, приба-

вляемая къ работѣ A , равна $\frac{1}{2} P_m \delta_m$, если δ_m обозначаетъ взаимное перемѣщеніе пары точекъ m, m_1 .

Умноживъ четыре груза, фиг. 13, на P_m , получимъ группу, для которой величина δ_m выражаетъ взаимное вращеніе пары прямыхъ $(m), (m_1)$, измѣренное по дугѣ.

Подобнымъ же путемъ, умножая грузы, взятые изъ фиг. 15, на P_m , получимъ группу грузовъ, для которой величина δ_m равна измѣненію разстоянія mf .

Прилагаемый примѣръ можетъ быть достаточнымъ, чтобы объяснить образованіе группы грузовъ; упомянемъ только, что каждый грузъ, дѣйствующій на рѣшетку, можетъ быть указанъ всегда только одной отдѣльной группой. Краткости ради, назовемъ такую группу силой *нагрузкой* и соответствующее ей δ — *путемъ этой нагрузки*. Впоследствии, подъ выраженіемъ нагрузка P_m пары точекъ m, m_1 или пары прямыхъ $(m) (m_1)$ будемъ подразумѣвать тѣ нагрузки, которыя получаются, по только что сдѣланному объясненію, черезъ умноженіе *единичныхъ нагрузокъ* каждой пары на P_m (см. стр. 20 и 23).

Всѣ δ суть линейныя функции нагрузокъ P ; поэтому ихъ можно представить въ формѣ:

$$(32) \quad \begin{cases} \delta_a = \delta_{aa} P_a + \delta_{ab} P_b + \dots + \delta_{am} P_m + \dots \\ \delta_b = \delta_{ab} P_a + \delta_{bb} P_b + \dots + \delta_{bm} P_m + \dots \\ \dots \\ \delta_m = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \dots + \delta_{mm} P_m + \dots \\ \dots \end{cases}$$

гдѣ количества δ съ двойными знаками не зависятъ отъ нагрузокъ P . Чтобы получить эти количества, положимъ въ какомъ нибудь одномъ изъ уравненій (20) всѣ P равными нулю, за исключеніемъ одного P , которое сдѣлаемъ равнымъ единицѣ. Тогда получимъ, напр., δ_{mb} , какъ значеніе, которое принимаетъ путь δ_m въ случаѣ, если на рѣшетку будетъ дѣйствовать только нагрузка $P_b = 1$.

17.—Предположимъ теперь, что имѣются двѣ нагрузки, P_m и P_n . Соответствующіе пути будутъ:

$$\begin{aligned} \delta_m &= \delta_{mm} P_m + \delta_{mn} P_n \\ \delta_n &= \delta_{nm} P_m + \delta_{nn} P_n. \end{aligned}$$

Если сначала взять нагрузку P_m , то путь ея $= \delta_{mm} P_m$, и поэтому нагрузка P_m , возрастающая постепенно отъ нуля, произведетъ механическую работу $\frac{1}{2} \delta_{mm} P_m^2$.

Если прибавить нагрузку P_n , возрастающую также отъ нуля, то работа внѣшнихъ силъ увеличивается во первыхъ на $\frac{1}{2} \delta_{nn} P_n^2$, потому что возрастающая нагрузка P_n описываетъ путь $\delta_{nn} P_n$, и

во вторыхъ на P_m ($\delta_{mn} P_n$), потому что путь уже существующей нагрузки P_m получаетъ увеличеніе $\delta_{mn} P_n$. Въ суммѣ получимъ:

$$A = \frac{1}{2} \delta_{mm} P_m^2 + \frac{1}{2} \delta_{nn} P_n^2 + \delta_{mn} P_m P_n.$$

Если же сначала приложить нагрузку P_n , а потомъ P_m , то получимъ, переставивъ m и n :

$$A = \frac{1}{2} \delta_{nn} P_n^2 + \frac{1}{2} \delta_{mm} P_m^2 + \delta_{nm} P_n P_m.$$

Но по закону Клапейрона оба выраженія A должны быть равны, поэтому получимъ важное уравненіе:

$$(33) \quad \delta_{nm} = \delta_{mn}.$$

Впервые это равенство было найдено Максвеллемъ; оно выражаетъ такъ называемую *теорему Максвелля*. Изъ многихъ слѣдствій, которыя получаются изъ уравненія (33), слѣдующія будутъ имѣть важное значеніе для дальнѣйшихъ изслѣдованій:

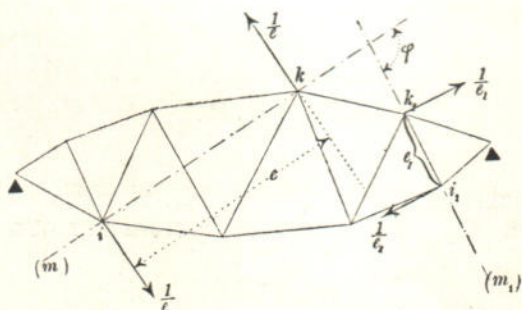
1) Взаимное перемѣщеніе δ_{mn} пары точекъ m, m_1 отъ единичной нагрузки, приложенной къ другой парѣ точекъ n, n_1 , равно взаимному перемѣщенію δ_{nm} пары точекъ n, n_1 отъ дѣйствія единичной нагрузки пары точекъ m, m_1 .

2) Взаимное вращеніе δ_{mn} пары прямыхъ $(m), (m_1)$ отъ единичной нагрузки другой пары прямыхъ $(n), (n_1)$ равняется взаимному вращенію δ_{nm} пары прямыхъ $(n), (n_1)$ отъ дѣйствія единичной нагрузки пары прямыхъ $(m), (m_1)$.

3) Взаимное перемѣщеніе пары точекъ m, m_1 отъ единичной нагрузки пары прямыхъ $(n), (n_1)$ равно взаимному вращенію пары прямыхъ $(n), (n_1)$ отъ дѣйствія единичной нагрузки пары точекъ m, m_1 .

Слѣдствія (2) и (3) относятся къ плоской рѣшеткѣ.

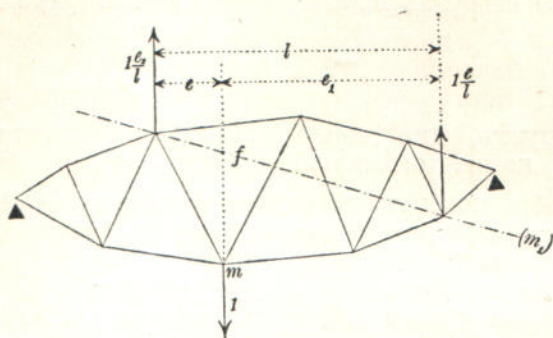
Объясненія терминовъ: пара точекъ, пара прямыхъ, единичная нагрузка пары точекъ или пары прямыхъ находятся на стр. 20 и 23.



Фиг. 27.

Приведемъ еще примѣръ, къ которому можно примѣнить теорему Максвелля. Фиг. 27 и 28 представляютъ одну и ту же рѣшетку, но нагруженную

различными способами; расстояние, на которое изменится отрезок mf на фиг. 28, если на решетку будут действовать грузы $\frac{1}{e}$ и $\frac{1}{e_1}$, принятые на фиг. 27, равно изменению, выраженному в мерѣ дуги круга, которое получает угол φ (фиг. 27) в случаѣ, если решетка будет находиться подъ дѣйствіемъ силъ, взятыхъ для фиг. 28. (Отрезки e, e_1 , обозначенные на фиг. 27 и 28 одинаковыми буквами, могутъ быть неодинаковыми по величинѣ).



Фиг. 28.

18.—Для другого доказательства теоремы Максвелла служить слѣдующее разсужденіе. Рѣшетка, при предположеніяхъ, сдѣланныхъ въ № 16, находится подъ дѣйствіемъ произвольныхъ нагрузокъ P_m . Вслѣдствіе этого получаютъ напряжения S_m и измененія длины стержней $\Delta s_m = \frac{S_m s}{EF}$.

Пусть, по удаленіи P_m , на рѣшетку будутъ дѣйствовать другія нагрузки P_n , которыя вызываютъ напряжения S_n и измененія длины $\Delta s_n = \frac{S_n s}{EF}$.

Величина (δ_{mn}) означаетъ теперь путь δ_m какой нибудь нагрузки P_m , если на рѣшетку будетъ дѣйствовать только нагрузка P_n , затѣмъ (δ_{nm}) означаетъ путь какой нибудь нагрузки P_n , вызываемый нагрузками P_m . Величины δ включены въ скобки, такъ какъ онѣ теперь имѣютъ другое значеніе, чѣмъ ранѣе выведенныя δ_{mn} и δ_{nm} ; изъ этихъ послѣднихъ величинъ δ_{mn} , напримѣръ, представляетъ значеніе δ_m для случая, когда имѣется только одна нагрузка P_n , равная единицѣ.

Напишемъ теперь уравненіе работы (13) разъ для состоянія нагрузки (P_m, S_m) и для независимаго отъ этого состоянія перемѣщенія $[(\delta_{mn}) \Delta s_n]$, а затѣмъ для состоянія нагрузки (P_n, S_n) и для независимаго отъ этого состоянія перемѣщений $[(\delta_{nm}) \Delta s_m]$, тогда получимъ уравненія:

$$\Sigma P_m (\delta_{mn}) = \Sigma S_m \Delta s_n = \Sigma S_m \frac{S_n s}{EF} \text{ и}$$

$$\Sigma P_n (\delta_{nm}) = \Sigma S_n \Delta s_m = \Sigma S_n \frac{S_m s}{EF},$$

что приводить къ закону, указанному впервые Бетти (Betti):

$$(34) \quad \Sigma P_m (\delta_{mn}) = \Sigma P_n (\delta_{nm}).$$

Если на рѣшетку дѣйствуетъ сначала только нагрузка $P_m = 1$, потомъ только нагрузка $P_n = 1$; то изъ уравн. (34) получимъ:

$$\delta_{mn} = \delta_{nm},$$

а отсюда слѣдуетъ, что теорема Максвелла есть только частный случай общей, позже доказанной теоремы Бетти.

19.—Чтобы показать примѣненіе теоремы Максвелла къ расчету статически неопредѣлимыхъ рѣшетокъ, займемся сначала задачей, уже рѣшенной въ № 11 и 13 другимъ путемъ: *опредѣлить линіи опорныя сопротивленія X_a и напряженія X_b , X_c линіихъ стержней арочной фермы представленной на фиг. 16.* Примемъ во вниманіе также измѣненія температуры и перемѣщенія опорныхъ точекъ, см. стр. 27.

Причислимъ (какъ на фиг. 17, стр. 25) силы X_a , X_b , X_c къ грузамъ, дѣйствующимъ на главную рѣшетку; тогда для путей δ_a , δ_b , δ_c нагрузокъ X_a , X_b , X_c получимъ значенія:

$$(35) \quad \begin{cases} \delta_a = \Sigma P_m \delta_{am} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ab} X_b - \delta_{ac} X_c + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \Sigma P_m \delta_{bm} - \delta_{ba} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{bc} X_c + \delta_{bt} + \delta_{bw} \\ \delta_c = \Sigma P_m \delta_{cm} - \delta_{ca} X_a - \delta_{cb} X_b - \delta_{cc} X_c + \delta_{ct} + \delta_{cw} \end{cases}$$

гдѣ

δ_{am} — означаетъ вліяніе причины $P_m = 1$ на путь δ_a ,
 δ_{aa} — тоже вліяніе причины $X_a = -1$,
 δ_{ab} — " " " $X_b = -1$,
 δ_{ac} — " " " $X_c = -1$,
 δ_{at} — " " отъ измѣненій температуры,
 δ_{aw} — " " „ перемѣщеній опорныхъ точекъ;

подобныя объясненія распространяются и на остальные величины δ съ двойными указателями.

Чтобъ опредѣлить δ_{aw} напомнимъ уравненіе работы для состоянія нагрузки $X_a = -1$ (фиг. 19) и приэтомъ положимъ, что каждому стержню соотвѣтствуетъ измѣненіе длины $\Delta s = 0$. Тогда получимъ:

$$1 \cdot \delta_{aw} + 1 \cdot \delta_{bw} + 1 \cdot \frac{e}{l_1} (\delta_A - \delta_B - \delta_C + \delta_D) = 0,$$

а отсюда, и изъ другихъ подобныхъ уравненій, написанныхъ для состояній нагрузокъ $X_b = -1$, $X_c = -1$, слѣдуетъ:

$$\delta_{aw} = -L_a; \delta_{bw} = -L_b; \delta_{cw} = -L_c \text{ (сравн. стр. 28).}$$

Если вставить эти значенія въ уравн. (35) и замѣтить, что буквы двойныхъ указателей должны быть переставлены другъ съ другомъ, такъ напр.

$$\delta_{am} = \delta_{ma}; \delta_{bm} = \delta_{mb}; \delta_{cm} = \delta_{mc}; \delta_{ab} = \delta_{ba}; \dots$$

то придемъ къ уравненіямъ (25), полученнымъ на стр. 31.

Этотъ способъ всегда приведетъ насъ къ желаемой цѣли. Каждую статически неопредѣлимую рѣшетку можно разсматривать, удаляя лишніе стержни и реакции опоръ, какъ статически опредѣлимую рѣшетку, (называемую главной рѣшеткой). Пусть на эту главную рѣшетку дѣйствуютъ, кромѣ данныхъ грузовъ P_m и измѣненій температуры, еще нѣкоторыя предварительно неизвѣстныя нагрузки $X_a, X_b, X_c, X_d \dots$, пути которыхъ подчинены опредѣленнымъ условіямъ.

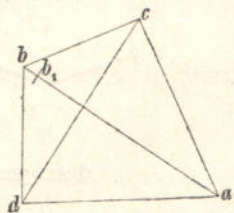
Тогда можно составить уравненія

$$(36) \left\{ \begin{array}{l} L_a - \delta_{at} + \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ba} X_b - \delta_{ca} X_c - \delta_{da} X_d - \dots \\ L_b - \delta_{bt} + \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - \delta_{ab} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{cb} X_c - \delta_{db} X_d - \dots \\ L_c - \delta_{ct} + \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - \delta_{ac} X_a - \delta_{bc} X_b - \delta_{cc} X_c - \delta_{dc} X_d - \dots \\ L_d - \delta_{dt} + \delta_d = \Sigma P_m \delta_{md} - \delta_{ad} X_a - \delta_{bd} X_b - \delta_{cd} X_c - \delta_{dd} X_d - \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

изъ которыхъ можно быстро опредѣлить статически неопредѣлимые величины X , если только деформации главной рѣшетки, соответствующія состояніямъ нагрузки $X_a = -1, X_b = -1, X_c = -1, \dots$ и значенія $\delta_{at}, \delta_{bt}, \dots$, зависящія отъ измѣненій температуры, представлены въ удобной формѣ. Если опредѣленіе этихъ перемѣщеній встрѣчаетъ затрудненія, то примѣняютъ уравненія (20) или (29), выведенныя въ №№ 11 и 13.

г. Вліяніе неправильной длины лишнихъ стержней. Искусственное натяженіе.

20.—Въ предыдущихъ изслѣдованіяхъ предполагали, что каждый стержень получаетъ точно ту длину, которая соответствуетъ напряженному состоянію рѣшетки. Въ статически неопредѣлимыхъ рѣшеткахъ ничтожныя ошибки въ длинѣ лишнихъ стержней могутъ имѣть послѣдствіемъ существенныя измѣненія напряженій. Напримѣръ, въ четырехугольникъ (фиг. 29), составленный изъ пяти стержней, введемъ шестой ab , который обладаетъ черезчуръ малой длиной ab_1 , такъ что этотъ стержень придется предварительно натянуть, чтобы онъ удлинился на величину b_1b . Вслѣдствіе этого, на первоначальную рѣшетку въ a и b будутъ дѣйствовать нѣкоторыя силы, которыя вызовутъ въ стержняхъ неожиданныя напряженія.



Фиг. 29.

Чтобы воспользоваться ранее выведенными уравнениями для расчета тѣхъ статически неопредѣлимыхъ рѣшетокъ, лишніе стержни которыхъ, вслѣдствіе ихъ неправильной длины, должны быть вставлены съ начальнымъ напряженіемъ, представимъ себѣ, что ошибки установки будутъ уничтожены охлажденіемъ или нагрѣваніемъ неправильно приготовленныхъ стержней, *передъ* введеніемъ этихъ стержней въ рѣшетку.

Длина s стержня, температуру котораго увеличиваемъ на t' , удлинится на $\varepsilon t's$, поэтому температуру стержня, который короче на ωs , надо поднять на величину $t' = \frac{\omega}{\varepsilon}$, а температуру стержня,

который длиннѣе на ωs , чѣмъ слѣдуетъ, надо понизить на $t' = \frac{\omega}{\varepsilon}$.

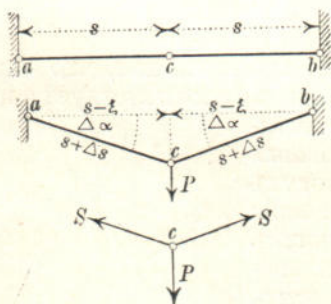
Когда стержни установлены на свое мѣсто, то предположимъ, что начальная температура стержней опять установилась, т. е. для нагрѣтыхъ стержней уменьшимъ температуру на $(-t')$, для охлажденныхъ возвысимъ температуру на $(+t')$. Теперь можно ввести въ расчетъ ошибки въ установкѣ; для этого въ предыдущихъ изслѣдованіяхъ надо увеличить вводимыя величины измѣненій температуры t на $t' = \frac{\omega}{\varepsilon}$ для стержня, который на ωs длиннѣе, чѣмъ слѣ-

дуетъ, и уменьшить на $t' = \frac{\omega}{\varepsilon}$ для стержня, который на ωs короче, чѣмъ слѣдуетъ.

Если лишніе стержни вводятся нарочно съ неправильной длиной, то получимъ *рѣшетку съ искусственнымъ натяженіемъ*.

г. Исключительные случаи.

21.—Въ предыдущихъ изслѣдованіяхъ мы, при составленіи условій равновѣсія, пренебрегали деформациями рѣшетки, что вполне допустимо; поэтому подобныя изслѣдованія примѣнимъ къ такимъ рѣшеткамъ, узлы которыхъ подвергаются очень ничтожнымъ пере-



Фиг. 30.

мѣщеніямъ; примѣненіе же этихъ изслѣдованій къ фермамъ съ недостаточной жесткостью (напр. для недостаточно жесткихъ висячихъ мостовъ) приводитъ къ совершенно невѣрнымъ результатамъ. Но бываютъ такіе случаи, когда даже незначительная упругая деформация не позволяетъ примѣнить приближенный способъ расчета; упомянемъ о рѣшеткахъ съ бесконечно малою подвижностью, (см. I томъ, выпускъ III, №№ 138, 140, 142), всѣ стержни и опоры которыхъ жестки, узлы же могутъ перемѣщаться другъ относительно друга (хотя бы и на

весьма малые протяженія). Особенно простой случай подобнаго рода представленъ на фиг. 30. Оси обоихъ горизонтальныхъ стержней ac и bc лежатъ на одной прямой; a и b неподвижные опорные

шарниры. Круги, описанные радиусомъ s около a и b , имѣютъ общій элементъ дуги, по которому s можетъ двигаться свободно. Если рѣшетка будетъ нагружена грузомъ P , и каждый изъ опорныхъ шарнировъ перемѣстится на одну и ту же величину ξ , то въ стержняхъ ac и bc будутъ вызваны одинаковыя напряжения S . Тогда получимъ:

$$2S \sin \Delta \alpha = P;$$

$$\sin \Delta \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \Delta \alpha}; \quad \cos \Delta \alpha = \frac{s - \xi}{s + \Delta s}; \quad \Delta s = \frac{Ss}{EF},$$

слѣдовательно:

$$4S^2 \left[1 - \frac{E^2 F^2 (s - \xi)^2}{s^2 (EF + S)^2} \right] = P^2;$$

это уравненіе даетъ для S опредѣленное конечное значеніе, которое тѣмъ больше, чѣмъ больше E и F . Если опоры и стержни будутъ приняты совершенно жесткими, то (такъ какъ $\xi = 0$, $\Delta s = 0$, $\sin \Delta \alpha = 0$) для напряжения S , даже при очень маломъ грузѣ P , получается невѣрное значеніе $S = \infty$ *).

Къ подобному же результату приходимъ при точномъ расчетѣ шестиугольника Паскаля (см. I томъ, выпускъ III, № 139 и 140).

Равновѣсіе въ этомъ случаѣ, даже при жесткихъ стержняхъ, наступаетъ вообще послѣ взаимнаго перемѣщенія узловыхъ точекъ. Но такъ какъ эта деформация безконечно мала, то при составленіи условий равновѣсія можно удержать первоначальную форму рѣшетки, и тогда (по № 138, выпускъ III, томъ I) для напряженій S получимъ безконечно большія или неопредѣленные значенія. Но если принять во вниманіе упругія перемѣщенія, то условия равновѣсія доставляютъ для каждого напряжения S одно совершенно опредѣленное конечное значеніе.

Тѣмъ не менѣе не слѣдуетъ проектировать подобныхъ рѣшетокъ, такъ какъ напряжения ихъ, даже при ничтожной нагрузкѣ, получаются чрезмѣрно большими.

В. Законы для однородныхъ твердыхъ тѣлъ произвольнаго вида.

а. Предположенія и объясненія. Законъ возможныхъ перемѣщеній.

22.—Въ этомъ сочиненіи мы будемъ изслѣдовать кромѣ рѣшетчатыхъ фермъ еще такія фермы, которыя составлены изъ прямыхъ или криволинейныхъ сплошныхъ (не рѣшетчатыхъ) частей

*) См. примѣчаніе къ № 138, томъ I, выпускъ III.

Теорія такихъ фермъ основывается на выводѣ нѣкоторыхъ законовъ, которые могутъ быть примѣнены къ твердымъ тѣламъ произвольнаго вида, если только деформации этихъ тѣлъ будутъ весьма малы.

23.—Выдѣлимъ изъ даннаго твердаго тѣла, находящагося въ равновѣсїи, безконечно малый элементъ. Силы, дѣйствующія на боковой поверхности этого элемента называются *поверхностными силами* (*силами граней*); онѣ раздѣляются на силы *внутреннія* или *внѣшнія*, смотря по тому приложены онѣ къ гранямъ, лежащимъ внутри тѣла или же на его поверхности; кромѣ этихъ силъ на данный элементъ могутъ дѣйствовать еще другія внѣшнія силы, напр., сила тяжести и т. п.

Предположимъ, что тѣло, находящееся первоначально въ равновѣсїи, будетъ подвержено дѣйствию внѣшнихъ силъ и измѣненію температуры; вслѣдствіе этого воздѣйствія тѣло будетъ деформироваться. Деформация будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока не наступитъ новое состояніе равновѣсія; во время этой деформации силы граней разсматриваемаго элемента тѣла произведутъ опредѣленную работу; особенно важное значеніе имѣетъ та часть этой работы, которая зависитъ только отъ деформации элемента тѣла и которая исчезаетъ, если элементъ перемѣщается, не измѣняя своей формы. Эту часть общей работы силъ граней называютъ *работой деформации элемента тѣла*; интегрированіе выраженія этой работы по всему тѣлу доставитъ работу деформации тѣла. При вычисленіи этой работы слѣдуетъ помнить, что силы граней, окончательную величину которыхъ мы будемъ обозначать буквой R , могутъ мѣняться во время деформации тѣла.

Предположимъ, что силы граней въ теченіи всей работы сохраняли свою конечную величину R ; опредѣлимъ произведенную силами R работу деформации, замѣнивъ при этомъ *дѣйствительную* деформацию, нѣкоторой *произвольной*, но *вполнѣ возможной*, которая происходитъ не отъ силъ R , а отъ нѣкоторыхъ другихъ причинъ; тогда получимъ выраженіе dA_r , называемое *возможной работой деформации* элемента тѣла; произвольная же возможная деформация называется *возможной деформацией*.

Разсмотримъ теперь безконечно малую возможную деформацию тѣла, находящагося въ равновѣсїи, а также перемѣщеніе и измѣненіе вида элемента тѣла; обозначимъ черезъ dA_m возможную работу объемныхъ силъ, дѣйствующихъ на этотъ элементъ тѣла, а черезъ dA_f —возможную работу силъ граней. Послѣдняя работа состоитъ изъ двухъ частей: одна часть dA_e зависитъ только отъ измѣненія вида элемента тѣла, а другая часть, именно $dA_f - dA_e$, зависитъ отъ движенія центра массы и отъ вращенія элемента тѣла вокругъ этого центра.

Величина $dA_m + dA_f - dA_e$ представляетъ ту возможную работу, которую производятъ всѣ силы, дѣйствующія на элементъ тѣла, когда движеніе этого элемента происходитъ безъ измѣненія вида тѣла. Но эта работа должна равняться нулю, такъ какъ равнодѣйствующая всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на элементъ тѣла (при предполагаемомъ состояніи равновѣсія), равнялась вначалѣ нулю и затѣмъ сохраняла это значеніе во все время воображаемаго безконечно малаго движенія.

Отсюда слѣдуетъ, что $dA_m + dA_f = dA_e$; написавъ эти уравненія для всѣхъ элементовъ тѣла и сложивъ ихъ, получимъ:

$$(37) \quad A_m + A_f = A_e.$$

Въ выраженіи A_f работы *внутреннихъ* силъ граней взаимно уничтожаются, потому что на соприкасающихся граняхъ сосѣднихъ элементовъ тѣла при одинаковыхъ перемѣщеніяхъ дѣйствуютъ силы равныя и взаимно противоположныя; отсюда слѣдуетъ, что A_f выражаетъ *возможную работу силъ вѣншихъ граней*, а $A_f + A_m$ — *возможную работу всѣхъ вѣншихъ силъ*. Такимъ образомъ уравненіе (37) выражаетъ слѣдующій законъ:

При весьма малой возможной деформации тѣла, находящагося въ равновѣсїи, возможная работа вѣншихъ силъ равна возможной работѣ деформаци.

При выводѣ этого закона мы предполагали, что тѣ грани сосѣднихъ элементовъ тѣла, которыя покрываютъ другъ друга въ началѣ деформаци, продолжаютъ покрывать другъ друга въ теченіе всей деформаци, потому что только въ этомъ случаѣ могутъ взаимно уничтожиться работы силъ, дѣйствующихъ на эти грани. Пусть разсматриваемое тѣло состоитъ изъ нѣсколькихъ соприкасающихся частей, причемъ каждая часть въ отдѣльности соотвѣтствуетъ слѣдующимъ предположеніямъ; пусть существуетъ взаимное перемѣщеніе тѣхъ поверхностей, которыми въ началѣ соприкасались каждая двѣ части тѣла; тогда, чтобъ примѣнить къ этому случаю вышеуказанный законъ, мы должны причислить всѣ эти поверхности къ вѣншей поверхности, т. е. мы должны всѣ силы, дѣйствующія на эти поверхности, если только ихъ работы не уничтожаются взаимно, причислить къ вѣншимъ силамъ. Такъ напр., при треніи одной части тѣла о другую сопротивленія тренію, дѣйствующія въ мѣстахъ соприкосновенія, причисляются къ вѣншимъ силамъ.

24.—Чтобъ вывести общее выраженіе для A_e , отнесемъ данное тѣло къ прямоугольной системѣ координатъ и выдѣлимъ изъ той части тѣла, гдѣ напряженія измѣняются *непрерывно*, параллелепипедъ, ребра котораго имѣютъ въ началѣ длину dx , dy , dz .

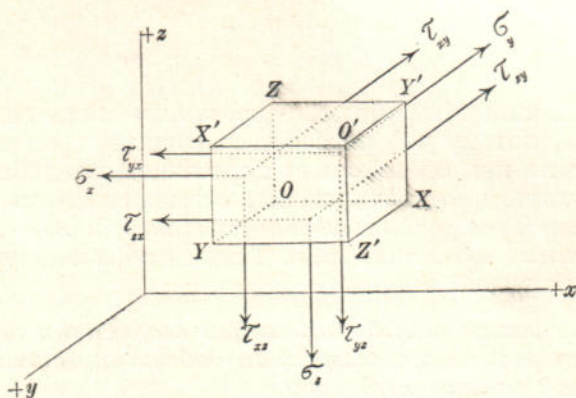
Разложимъ напряженіе грани $dy\ dz$, содержащей точку (x, y, z) и нормальной къ оси x , на составляющія:

$$\begin{array}{llll} \sigma_x, & \text{параллельную оси } x, & \text{положительное направленіе по } (-x), \\ \tau_{xy}, & " & " & y; & " & " & (-y), \\ \tau_{xz}, & " & " & z; & " & " & (-z), \end{array}$$

Подобнымъ же образомъ напряженія боковыхъ граней $dz\ dx$ и $dx\ dy$, прилегающихъ къ точкѣ (x, y, z) , могутъ быть заданы величинами ихъ составляющихъ:

$$\begin{array}{l} \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \\ \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}. \end{array}$$

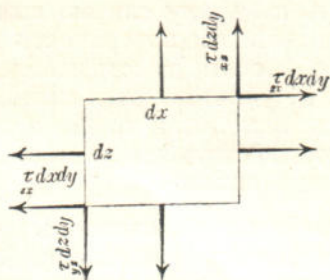
Буквой σ — обозначено напряжение — растяжение или сжатие, а τ — скалывающее напряжение (томъ I, выпускъ I, № 36).



Фиг. 31.

Умноживъ эти напряжения на соответствующія величины площадей, получимъ величины силъ, дѣйствующихъ на грани. Напр на грань $dy dz$ дѣйствуютъ три силы:

$$\sigma_x dy dz, \quad \tau_{xy} dy dz, \quad \tau_{xz} dy dz.$$



Фиг. 32.

Приравняемъ теперь нулю сумму моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на параллелепипедъ $dx dy dz$, относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести его и параллельной оси y . Напряжения въ противоположащихъ боковыхъ граняхъ отличаются между собой на бесконечно малыя величины четвертаго порядка, которыми, въ сравненіи съ величинами третьяго порядка, можно пренебречь; поэтому можемъ получить слѣдующее уравненіе (см. фиг. 32, проекція элемента на плоскость zx):

$$(\tau_{zx} dx dy) dz = (\tau_{xz} dy dz) dx \quad (\text{см. также томъ I, № 53});$$

а отсюда и изъ другихъ подобныхъ уравненій моментовъ относительно осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести параллелепипеда и параллельныхъ осямъ x и z , слѣдуетъ:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Ради краткости въ письмѣ введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\tau_x = \tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_y = \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_z = \tau_{xy} = \tau_{yx},$$

причемъ замѣтимъ, что

$$\tau_x \perp dx; \tau_y \perp dy; \tau_z \perp dz.$$

Пусть первоначальная длина dx измѣнится на такую величину $\Delta dx = \Delta' \left(\frac{dx}{2} \right) + \Delta'' \left(\frac{dx}{2} \right)$, чтобъ грань, содержащая точку (x, y, z) , перемѣстилась относительно центра массы M по направленію $(-x)$ на величину $\Delta' \left(\frac{dx}{2} \right)$, а противолежащая грань — по направленію $(+x)$ на величину $\Delta'' \left(\frac{dx}{2} \right)$. Тогда силы, дѣйствующія на эти грани:

$$\tau_x dy dz \text{ и } \left(\tau_x + \frac{d\tau_x}{dx} dx \right) dy dz$$

произведутъ добавочную возможную работу деформации:

$$\tau_x dy dz \Delta' \left(\frac{dx}{2} \right) + \left(\tau_x + \frac{d\tau_x}{dx} dx \right) dy dz \Delta'' \left(\frac{dx}{2} \right); \text{ пренебрегая малыми величинами четвертаго порядка: } \frac{d\tau_x}{dx} dx dy dz \Delta'' \left(\frac{1}{2} dx \right), \text{ получимъ:}$$

$$\tau_x dy dz \Delta dx = \tau_x \frac{\Delta dx}{dx} dV,$$

гдѣ $dV = dx dy dz$ объемъ параллелепипеда.

Отсюда и изъ другихъ подобныхъ разсужденій выводимъ слѣдующее слѣдствие: если первоначальная длина dx, dy, dz измѣняется на величины $\Delta dx, \Delta dy, \Delta dz$, то, обозначивъ относительныя удлиненія черезъ

$$(38) \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz},$$

получимъ, что часть возможной работы деформации dA_e параллелепипеда $(dx dy dz)$, зависящая отъ напряженій τ_x, τ_y, τ_z , равна

$$(39) \quad (\tau_x \varepsilon_x + \tau_y \varepsilon_y + \tau_z \varepsilon_z) dV.$$

Одновременно съ измѣненіями длины происходятъ и измѣненія угловъ, а вслѣдствіе этого скалывающія силы производятъ работу. Обозначимъ (фиг. 31) буквами:

$$\begin{array}{lll} \gamma_x & \text{измѣненіе угла} & YOZ \\ \gamma_y & " & ZOY \\ \gamma_z & " & XOY. \end{array}$$

Величины $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ называются *скольженіями* въ точкѣ x, y, z . Эти величины могутъ быть положительными или отрицательными, смотря по тому, уменьшаютъ ли они углы YOZ, ZOY, XOY или увеличиваютъ. При вычисленіи возможной работы деформации, произведенной при скольженіи скальвающими силами, можно опять пренебречь разницей въ напряженияхъ въ противоположащихъ граняхъ и принять за неподвижную точку вмѣсто центра массы — точку $x y z$.

Если уголъ YOZ измѣняется на γ_x , то грань YO' относительно грани OY' перемѣстится по направленію OZ на величину $\gamma_x dy$; при этомъ скальвающая сила $\tau_x dx dz$, дѣйствующая въ грани YO' нормально къ dx , произведетъ возможную работу $\tau_x dx dz \gamma_x dy$; или же грань ZO' перемѣстится относительно грани OZ' по направленію OY на величину $\gamma_x dz$, причемъ скальвающая сила $\tau_x dx dy$, дѣйствующая въ грани ZO' нормально къ dx , произведетъ работу $\tau_x dx dy \gamma_x dz$. Въ обоихъ случаяхъ работа равняется:

$$\tau_x \gamma_x dx dy dz = \tau_x \gamma_x dV.$$

Подобнымъ же путемъ получимъ выраженіе для работъ, соотвѣствующихъ скольженіямъ γ_y, γ_z ,

$$\tau_y \gamma_y dV \text{ и } \tau_z \gamma_z dV;$$

такъ что полная возможная работа деформации для силъ, дѣйствующихъ на грани элемента $(dxdydz)$, равна:

$$dA_e = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV.$$

Для всего тѣла получимъ:

$$(40) \quad A_e = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV.$$

При перемѣнныхъ напряженияхъ надо разбить тѣло на такія части, внутри которыхъ всѣ напряжения были бы постоянны. Величины A_e вычисляются тогда для каждой части отдѣльно и затѣмъ вмѣстѣ складываются.

Приравнявъ (по № 22) величину A_e возможной работѣ внѣшнихъ силъ Q , получимъ:

$$(41) \quad \Sigma Q_m \delta_m = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV,$$

гдѣ δ_m означаетъ перемѣщеніе точки приложенія m силы Q_m по направленію Q_m , соотвѣствующее удлиненіямъ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ и скольженіямъ $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, или, иначе говоря, это есть проекція пути точки m на направленіе Q_m .

Укажемъ здѣсь на то обстоятельство, что при выводѣ уравненія (41) предполагалось существованіе только условій равновѣсія

между вѣшными и внутренними силами, и что удлинёнія, скольжёнїя и соотвѣтствующія имъ перемѣщенїя δ не зависятъ ни отъ силъ Q , ни отъ напряженій σ и τ , и что эти величины могутъ быть вызваны какими нибудь другими причинами.

25. — Теперь положимъ, что буквами $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ обозначены *дѣйствительныя удлинёнія и скольжёнїя* при данномъ состоянїи нагрузки тѣла; буквами же $\bar{Q}, \bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y, \bar{\tau}_z$ обозначимъ величины вѣшнихъ силъ и напряженій для *воображаемаго* состоянїя нагрузки; къ этому состоянїю нагрузки и къ дѣйствительному состоянїю деформации примѣнимъ уравненїе (41), тогда получимъ уравненїе

$$(42) \quad \Sigma \bar{Q}_m \delta_m = \int (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x + \bar{\sigma}_y \varepsilon_y + \bar{\sigma}_z \varepsilon_z + \bar{\tau}_x \gamma_x + \bar{\tau}_y \gamma_y + \bar{\tau}_z \gamma_z) dV,$$

которое соотвѣтствуетъ уравненїю (13), выведенному для рѣшетки. Въ этомъ уравненїи δ_m означаетъ проекцію дѣйствительнаго пути точки m на направленїе воображаемой силы \bar{Q}_m .

Мы ограничимся изслѣдованїемъ дѣйствительныхъ удлинёній и скольженій въ однородныхъ (изотропныхъ) твердыхъ тѣлахъ, въ которыхъ въ начальномъ состоянїи не появляется никакихъ напряженій. Положимъ, что температура въ точкѣ (x, y, z) измѣнилась на величину t^0 .

Напряженїе σ_x вызываетъ относительное удлинёнїе ребра dx элементарнаго параллелепипеда тѣла $(dx \, dy \, dz)$, равное $\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$; измѣненїе же температуры на t^0 вызываетъ удлинёнїе $\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon t$; напряжения σ_x и σ_y вызываютъ: $\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{\sigma_y + \sigma_z}{mE}$, гдѣ $\frac{1}{m}$ — коэффициентъ поперечнаго сжатїя ($= \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$ для желѣза и стали *).

Общее дѣйствїе всѣхъ этихъ причинъ доставитъ удлинёнїе:

$$(43) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{mE} + \varepsilon t, \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{mE} + \varepsilon t, \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{mE} + \varepsilon t; \end{cases} \text{ а по аналогїи получимъ:}$$

величины же скольженій, зависящихъ отъ скалывающихъ напряженій, будутъ равняться:

$$(44) \quad \gamma_x = \frac{\tau_x}{G}, \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G}, \quad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G},$$

*) См. томъ I, выпускъ I, № 53.

гдѣ величина

$$(45) \quad G = \frac{m E}{2(m+1)}$$

представляет собой такъ наз. *коэффициентъ поперечной упругости, коэффициентъ при сдвигѣ* (также *модуль скольженія* *).

б. Примѣненіе уравненія (42).

26.—При расчетѣ сплошныхъ частей фермъ мы будемъ пользоваться уравненіемъ (42) на тѣхъ же основаніяхъ, на какихъ пользовались уравненіемъ (13) при расчетѣ рѣшетки. Положимъ, что составляющія сопротивленія опоръ C по заданнымъ направленіямъ, а также напряженія σ и τ выражаются линейными функціями данныхъ грузовъ P и извѣстныхъ статически неопредѣлимыхъ величинъ $X', X'', X''' \dots$, а именно:

$$(46) \quad \begin{cases} C = C_0 - C' X' - C'' X'' - C''' X''' - \dots \\ \sigma_x = \sigma_{x0} - \sigma'_x X' - \sigma''_x X'' - \sigma'''_x X''' - \dots \\ \sigma_y = \sigma_{y0} - \sigma'_y X' - \sigma''_y X'' - \sigma'''_y X''' - \dots \\ \sigma_z = \sigma_{z0} - \sigma'_z X' - \sigma''_z X'' - \sigma'''_z X''' - \dots \\ \tau_x = \tau_{x0} - \tau'_x X' - \tau''_x X'' - \tau'''_x X''' - \dots \\ \tau_y = \tau_{y0} - \tau'_y X' - \tau''_y X'' - \tau'''_y X''' - \dots \\ \tau_z = \tau_{z0} - \tau'_z X' - \tau''_z X'' - \tau'''_z X''' - \dots \end{cases}$$

Величины со знакомъ 0 суть функціи первой степени грузовъ P и не зависятъ отъ величинъ $X', X'' \dots$. Значенія $C', C'' \dots, \sigma', \sigma'', \dots, \tau', \tau'' \dots$ не зависятъ ни отъ P , ни отъ X .

Кромѣ того величины

C', σ', τ' представляютъ сопротивленія опоръ и напряженія для состоянія нагрузки $X' = -1$,

C'', σ'', τ'' — сопротивленія опоръ и напряженія для состоянія $X'' = -1$ и т. д.

Примѣняя теперь уравненіе (42) по порядку къ состояніямъ нагрузки: $X' = -1, X'' = -1$, и каждый разъ къ дѣйствительному состоянію перемѣщений, получимъ рядъ уравненій, достаточныхъ для вычисленія величинъ X', X'', \dots :

$$(47) \quad \begin{cases} L' = \int (\sigma'_x \varepsilon_x + \sigma'_y \varepsilon_y + \sigma'_z \varepsilon_z + \tau'_x \gamma_x + \tau'_y \gamma_y + \tau'_z \gamma_z) dV \\ L'' = \int (\sigma''_x \varepsilon_x + \sigma''_y \varepsilon_y + \sigma''_z \varepsilon_z + \tau''_x \gamma_x + \tau''_y \gamma_y + \tau''_z \gamma_z) dV \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

* См. Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit, 2 издание, Берлинъ 1878, стр. 24 и 30.

гдѣ $L', L'' \dots$ обозначаютъ возможную работу опорныхъ сопротивленийъ соответственно для состояній $X' = -1, X'' = -1, \dots$

27. — Пусть требуется найти взаимное перемѣщеніе δ_m двухъ точекъ m и m_1 данного тѣла, обусловленное опредѣленными удлиненьями и скольженіями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$. Приложимъ въ точкахъ m и m_1 двѣ силы, равныя единицѣ, совпадающія по направленію съ прямой $m m_1$, со стрѣлками, направленными другъ отъ друга (фиг. 9). Для этого воображаемаго состоянія нагрузки и для дѣйствительнаго состоянія перемѣщеній составимъ уравненіе (42); тогда получимъ

$$(48) \quad 1 \cdot \delta_m + \bar{L} = \int (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x + \bar{\sigma}_y \varepsilon_y + \bar{\sigma}_z \varepsilon_z + \bar{\tau}_x \gamma_x + \bar{\tau}_y \gamma_y + \bar{\tau}_z \gamma_z) dV,$$

гдѣ $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ и \bar{L} означаютъ напряженія и сопротивленія опоръ, находящіяся въ равновѣсїи съ единичной нагрузкой пары точекъ m, m_1 .

Подобнымъ же путемъ мы можемъ рассмотреть всѣ задачи, которые были рѣшены въ № 9, 10, 14 для рѣшетки.

с. Законъ Клапейрона и теоремы Максвелла и Бетти.

28. — Предположимъ, что внѣшнія и внутреннія силы возрастаютъ постепенно отъ нуля и что видоизмѣненіе тѣла происходитъ также постепенно безъ колебаній. Для каждой безконечно малой деформации, на которая можно разложить полную деформацию тѣла, имѣемъ возможность примѣнить уравненіе (42), а интегрированіе доставить слѣдующую зависимость:

$$(49) \quad \Sigma \int Q d\delta = \int (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z) dV,$$

гдѣ $Q, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ означаютъ величину внѣшнихъ силъ и напряженій въ то мгновеніе, когда перемѣщеніе δ увеличивается на $d\delta$, а относительныя удлиненья и скольженія увеличиваются на $d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\varepsilon_z, d\gamma_x, d\gamma_y, d\gamma_z$.

Лѣвая часть уравненія (49) выражаетъ величину механической работы внѣшнихъ силъ Q , правая же часть — величину дѣйствительной работы деформации A даннаго тѣла. Если начальная температура во всѣхъ точкахъ тѣла была $t=0$, то получимъ:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left(d\sigma_x - \frac{1}{m} d\sigma_y - \frac{1}{m} d\sigma_z \right); & d\gamma_x &= \frac{1}{G} \tau_x, \\ d\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left(d\sigma_y - \frac{1}{m} d\sigma_z - \frac{1}{m} d\sigma_x \right); & d\gamma_y &= \frac{1}{G} \tau_y, \\ d\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left(d\sigma_z - \frac{1}{m} d\sigma_x - \frac{1}{m} d\sigma_y \right); & d\gamma_z &= \frac{1}{G} \tau_z, \text{ т. е.} \\ \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z &= \\ &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x d\sigma_x + \sigma_y d\sigma_y + \sigma_z d\sigma_z - \frac{1}{m} d(\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) \right] \\ &+ \frac{1}{G} \left[\tau_x d\tau_x + \tau_y d\tau_y + \tau_z d\tau_z \right], \end{aligned}$$

а отсюда послѣ интегрирования:

$$(50) \quad A = \frac{1}{2} \int \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m} (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) \right] \frac{dV}{E} \\ + \frac{1}{2} \int (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \frac{dV}{G}.$$

Съ другой стороны мы имѣемъ такое уравненіе:

$$\Sigma Q \delta = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV, \\ = \int \left[\sigma_x \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) + \sigma_y \left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m} \right) \right. \\ \left. + \sigma_z \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) \right] \frac{dV}{E} + \int (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \frac{dV}{G},$$

которое можно легко преобразовать въ слѣдующее:

$$\Sigma Q \delta = 2 A.$$

Но такъ какъ, по уравн. (50), $\Sigma \int Q \delta = A$, то получимъ

$$\Sigma \int Q \delta = \Sigma \frac{Q \delta}{2},$$

а отсюда слѣдуетъ, что законъ Клапейрона, доказанный въ № 8 для рѣшетки, имѣетъ значеніе и для однородныхъ твердыхъ тѣлъ.

Изъ условій примѣнимости закона Клапейрона къ однороднымъ твердымъ тѣламъ слѣдуетъ также, что къ однороднымъ твердымъ тѣламъ можно примѣнить и принципъ Максвелла, выведенный въ № 17 для случая, когда $t = 0$ и $L = 0$.

29.—Для вывода теоремы Максвелла, какъ частнаго случая общаго закона Бетти (подобно тому, какъ это было сдѣлано въ № 18), примемъ, что на тѣло дѣйствуетъ первоначально нагрузка P_m . Представимъ себѣ, что данное тѣло раздѣлено на бесконечно малые элементы системой трехъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей; пусть въ боковыхъ граняхъ этихъ элементовъ вызываются только нормальныя напряжения, которые мы обозначимъ буквами σ_1' , σ_2' , σ_3' и назовемъ главными.

Соотвѣтствующія удлиненія будутъ ($t = 0$):

$$(51) \quad \begin{cases} \varepsilon_1' = \left[\sigma_1' - \frac{1}{m} (\sigma_2' + \sigma_3') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_2' = \left[\sigma_2' - \frac{1}{m} (\sigma_3' + \sigma_1') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_3' = \left[\sigma_3' - \frac{1}{m} (\sigma_1' + \sigma_2') \right] \frac{1}{E}; \end{cases}$$

скольженія же равны нулю.

Замѣнимъ нагрузку P_m другою нагрузкой P_n , но сохранимъ прежнее раздѣленіе тѣла на элементы. Тогда нормальныя напряженія будутъ равны σ_1'' , σ_2' , σ_3'' , а вызываемыя ими удлиненія:

$$(52) \quad \begin{cases} \varepsilon_1'' = \left[\sigma_1'' - \frac{1}{m} (\sigma_2'' + \sigma_3'') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_2'' = \left[\sigma_2'' - \frac{1}{m} (\sigma_3'' + \sigma_1'') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_3'' = \left[\sigma_3'' - \frac{1}{m} (\sigma_1'' + \sigma_2'') \right] \frac{1}{E} \end{cases}$$

Кромѣ того нагрузка P_n вызываетъ скалывающія напряженія τ'' и скользянія γ'' .

Назовемъ буквой (δ_{mn}) путь нагрузки P_m для того случая, когда на тѣло дѣйствуетъ только нагрузка P_n , а буквой (δ_{nm}) путь нагрузки P_n , когда на тѣло дѣйствуетъ только нагрузка P_m , и примѣнимъ уравненіе (42) сначала:

къ состоянію нагрузки (P_m) и къ случаю перемѣщеній, соответствующихъ нагрузкѣ P_n , но независимыхъ отъ состоянія нагрузки P_m ,

а затѣмъ:

къ состоянію нагрузки (P_n) и къ случаю перемѣщеній, независимыхъ отъ этого состоянія, но соответствующихъ нагрузкѣ P_m . Тогда получимъ слѣдующія уравненія:

$$\Sigma P_m (\delta_{mn}) = \int (\sigma_1' \varepsilon_1'' + \sigma_2' \varepsilon_2'' + \sigma_3' \varepsilon_3'') dV \text{ и}$$

$$\Sigma P_n (\delta_{nm}) = \int (\sigma_1'' \varepsilon_1' + \sigma_2'' \varepsilon_2' + \sigma_3'' \varepsilon_3') dV,$$

причемъ, согласно предположенію, работа сопротивленій опоръ равняется нулю. При составленіи этихъ уравненій слѣдуетъ помнить, что скользяніямъ γ'' соответствуютъ скалывающія напряженія $\tau' = 0$, а скалывающимъ напряженіямъ τ'' соответствуютъ скользянія $\gamma' = 0$.

При помощи уравненій (51) и (52) легко доказать, что

$$\sigma_1' \varepsilon_1'' + \sigma_2' \varepsilon_2'' + \sigma_3' \varepsilon_3'' = \sigma_1'' \varepsilon_1' + \sigma_2'' \varepsilon_2' + \sigma_3'' \varepsilon_3',$$

а также что

$$\Sigma P_m (\delta_{mn}) = \Sigma P_n (\delta_{nm}).$$

Отсюда вытекаетъ какъ частный случай (подобно доказанному въ № 18):

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}.$$

d. Теоремы Кастильяно.

30.—Принимая статически неопредѣлимые величины X (которыя можно всегда причислить къ силамъ) также какъ и P за независимыя переменныя въ уравненіяхъ (46), т. е. причисливъ предварительно величины X къ нагрузкамъ, мы можемъ смотрѣть на количества σ' , σ'' , . . . τ' , τ'' , . . . какъ на производныя количествъ σ и τ ; дѣйствительно, дифференцируя уравненія (46), получимъ:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X'} = -\sigma_x'; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial X'} = -\sigma_y'; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial X'} = -\sigma_z'; \quad \frac{\partial \tau_x}{\partial X'} = -\tau_x' \quad \dots \text{и т. д.}$$

Уравненія (47) можно написать тогда въ болѣе общей формѣ:

$$(53) \quad -L_X = \int \left(\varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial X} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial X} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial X} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial X} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial X} \right) dV,$$

гдѣ X — означаетъ статически неопредѣлимую величину, а L_X — возможную работу опорныхъ сопротивленій для состоянія $X = -1$.

Сдѣлавъ подстановку величинъ для удлинений и скольженій изъ уравн. (43) и (44), получимъ такое выраженіе:

$$(54) \quad \frac{\partial A_i}{\partial X} - L_X = 0,$$

гдѣ

$$(55) \quad A_i = A + \int (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \varepsilon t dV,$$

причемъ A равно дѣйствительной работѣ деформаціи. (См. уравн. 50).

Если работа опорныхъ сопротивленій равна нулю ($L_X = 0$) и если начальная температура для всѣхъ точекъ тѣла не мѣняется ($t = 0$), то уравн. (54) перейдетъ въ слѣдующее:

$$(56) \quad \frac{\partial A}{\partial X} = 0,$$

которое читается такъ:

если выразить работу деформаціи A въ видѣ функціи статически неопредѣлимыхъ величинъ X , считаемыхъ за независимыя переменныя, то эта работа будетъ наименьшею.

Это начало наименьшей работы деформаціи было доказано впервые Кастильяно (Castigliano).

Напишемъ уравн. (41) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Sigma Q_m \delta_m = \Sigma P_m \delta_m + L,$$

где $\Sigma P_m \delta_m$ означает возможную работу нагрузок P_m , а L — возможную работу опорных сопротивлений; заметим при этом, что уравнение (41) имеет место и для того случая, когда величины δ , ε_x , ε_y , ε_z , τ_x , τ_y , τ_z не зависят от сил Q ; а в таком случае, дифференцируя это уравнение по P_m и принимая деформацию неизменяющейся, получим:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_m + \frac{\partial L}{\partial P_m} = \int \bigg(\varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial P_m} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial P_m} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial P_m} \\ + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial P_m} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial P_m} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial P_m} \bigg) dV, \end{aligned}$$

а это выраженіе можно преобразовать въ слѣдующее:

$$(57) \quad \delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m} - \frac{\partial L}{\partial P_m};$$

изъ этого уравненія въ случаѣ, если сопротивленія опоръ не производятъ работы и если $t=0$, выводится слѣдующее уравненіе, выражающее начало, доказанное также Кастильяно:

$$(58) \quad \delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m}.$$

Это уравнение можно получить также на основании слѣдующихъ разсужденій. Пусть на тѣло дѣйствуютъ нагрузки $P_a, P_b, \dots P_m, \dots$; пусть пути этихъ нагрузокъ будутъ $\delta_a, \delta_b, \dots \delta_m, \dots$ (см. стр. 37). Въ случаѣ, если $L=0$ и $t=0$, получимъ:

$$\begin{array}{ccccccc} \delta_a = \delta_{aa} P_a + \delta_{ab} P_b + \dots + \delta_{am} P_m + \dots & & & & & & \\ \delta_b = \delta_{ba} P_a + \delta_{bb} P_b + \dots + \delta_{bm} P_m + \dots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \delta_m = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \dots + \delta_{mm} P_m + \dots & & & & & & \end{array}$$

Если P_m увеличится на δP_m , а остальные нагрузки останутся неизменными, то величины δa , δb , . . . δm , . . . увеличатся на

$$\partial A = P_a \partial \mathfrak{c}_a + P_b \partial \mathfrak{c}_b + \dots + P_m \partial \mathfrak{c}_m + \dots$$

Тогда получимъ

$$\partial A = (\partial_{am} P_a + \partial_{bm} P_b + \dots + \partial_{mm} P_m + \dots) \partial P_m,$$

а отсюда, принимая во вниманіе законъ $\delta_{mi} = \delta_{im}$, можемъ вывести:

$$\frac{\partial A}{\partial P_m} = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \dots + \delta_{mm} P_m + \dots = \delta_m.$$

Такъ какъ уравненіе (41) требуетъ только исполненія условій равновѣсія между внѣшними и внутренними силами, то при примѣненіи формулъ (57) и (58), на статически неопредѣлимые величины можно смотрѣть какъ на произвольныя переменныя. Такимъ образомъ, дифференцируя уравненіе по P_m , мы должны считать постоянными не только всѣ остальные нагрузки, но и всѣ X .

Примѣняя начало *Кастильяно* къ рѣшеткѣ (которая можетъ разсматриваться, какъ частный случай только что изслѣдованнаго тѣла), получимъ:

$$(59) \quad A_i = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \varepsilon t S s.$$



Литература.

1. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris 1852 и 1866 (2 издание)
2. Clerk Maxwell, *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames*, Philosophical Magazine, томъ 27, 1864, стр. 294. Эта статья содержитъ первую общую теорію статически неопредѣлимой рѣшетки, для того случая, когда рѣшетка находится въ ненапряженномъ состояніи и когда температура не мѣняется. Въ № 16 приводится законъ Максвелла, доказанный имъ только для перемѣщений, но не для вращеній.
3. Mohr, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, Zeitschr. des Hannov. Arch. und Ing. Vereins 1874 и 1875, продолженіе въ *Civilingenieur* 1885. Въ этомъ сочиненіи на основаніи закона возможныхъ перемѣщений установлена первая полная теорія статически неопредѣлимой рѣшетки; кромѣ того выведена теорема о взаимности упругихъ деформаций также только для перемѣщеній; впрочемъ эту теорему можно обобщить простой перемѣнной буквъ.
4. Castigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, (Turin, Negro) 1879. Въ началѣ этого извѣстнаго сочиненія доказывается при помощи закона Клапейрона теорема о производной работы деформации (уравн. 58 въ № 30 этой книги), а также вытекающая отсюда теорема о наименьшей работѣ деформации. Кастильяно примѣняетъ свой способъ также къ изслѣдованію такихъ рѣшетокъ, стержни которыхъ испытываютъ изгибъ, крученіе и перерѣзываніе.
5. Fränkel, въ своемъ сочиненіи: *Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben*, (Zeitschrift des Hannov. Arch. u. Ing.-Vereins 1882) доказываетъ, независимо отъ Кастильяно, теорему о наименьшей работѣ деформации, сначала для рѣшетки, а потомъ и для однородныхъ твердыхъ тѣлъ.
6. Castigliano. *Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici*, Atti delle Scienze di Torino томъ 17 (1882), стр. 705, содержитъ первый общій (т. е. примѣнимый къ однороднымъ упругимъ произвольной формы тѣламъ) выводъ теоремы Максвелла, а также описаніе теоремы Бетти (Betti), доказанной въ № 18 и № 29 этой книги. Последняя теорема выводится изъ теоремы Максвелла какъ частный случай, причемъ Бетти представляетъ ее въ слѣдующей формѣ:

$$\int_S \rho (Xu' + Yv' + Zw') dS + \int_s (Lu' + Mv' + Nw') ds$$

$$= \int_S \rho (X'u + Y'v + Z'w) dS + \int_s (L'u + M'v + N'w) ds.$$

Здѣсь означаютъ: $\rho X dS$, $\rho Y dS$, $\rho Z dS$ равныя массамъ величины силъ, параллельныхъ координатнымъ осямъ x , y , z , дѣйствующихъ на элементъ тѣла $dS = dx dy dz$ (ρ —плотность въ точкѣ xyz); затѣмъ $L ds$, $M ds$, $N ds$ внѣшнія силы, параллельныя осямъ x , y , z , дѣйствующія на элементъ ds внѣшней поверхности, и u , v , w — перемѣщенія по направлениямъ x , y , z точки (xyz) , происходящія отъ дѣйствія всѣхъ этихъ силъ, а u' , v' , w' — перемѣщенія, вызываемыя силами $\rho X' dS$, $\rho Y' dS$, $\rho Z' dS$, $L' ds$, $M' ds$, $N' ds$.

7. Swain, *On the application of the principle of virtual velocities to the determination of the deflection and stresses of frames.* Journal of the Franklin Institute, 1883, Febr. до April, стр. 102, 194, 250.
8. Melan, *Ueber den Einfluss der Wärme auf elastische Systeme.* Wochenschrift des österreich. Arch. u. Ing.-Ver. 1883, стр. 183 и 202. Развитие теоремы Кастильяно о наименьшей работѣ деформацин.
9. Müller-Breslau, *Der Satz von der Abgeleiteten der ideellen Formänderungsarbeit.* Zeitschr. des Arch. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1884, стр. 211. Развитие теоремы Кастильяно.
10. Krohn, *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkträger,* Zeitschrift des Hannov. Arch. u. Ing.-Vereins 1884. Выводъ теоремы Максвелла и примѣненіе ея къ расчету статически неопредѣлимыхъ рѣшетокъ.
11. Melan, *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme.* Zeitschrift des österreich. Arch. u. Ing.-Ver. 1884, стр. 100.
12. Weyrauch, *Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmter Systeme.* Wochenblatt für Arch. u. Ing. 1884, стр. 200.
13. Müller-Breslau, *Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte Körper.* Wochenblatt für Arch. u. Ing. 1884.
14. Weyrauch, *Theorie elastischer Körper.* Leipzig (y Teubner'a) 1884.
15. Müller-Breslau, *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen,* Leipzig 1886 (Baumgärtner's Buchhandlung) *). Здѣсь доказы-
вается, что теорема Максвелла имѣетъ значеніе не только для перемѣ-
щеній, а также и для вращеній.
16. Forchheimer, *Die Gegenseitigkeit der Verschiebungen,* Zeitschr. des österreich. Ing. u. Arch. Vereins 1886, содержитъ наглядное, основанное на теоремѣ Клапейрона (см. № 17 этого выпуска) доказательство теоремы Максвелла.
17. Land, *Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen u. s. w.* Wochenblatt für Baukunde 1887, стр. 14.



*) Второе изданіе 1893 г.; въ русскомъ переводѣ инженера Н. Митинскаго. Спб., 1898.

ОТДѢЛЪ I.

Опредѣленіе деформаций плоской рѣшетки и примѣненіе ихъ къ изслѣдованію статически неопре- дѣлимыхъ и статически опредѣ- лимыхъ фермъ.

§ 1.

Діаграмма перемѣщеній по способу Вилліо (Williot).

31. Пусть статически опредѣлимая плоская рѣшетка находится подъ дѣйствіемъ данныхъ грузовъ и даннаго измѣненія температуры. Напряженія стержней такой рѣшетки не зависятъ отъ измѣненія температуры (по стр. 6); опредѣляются же эти напряженія по способамъ, описаннымъ въ первомъ томѣ; измѣненія длины Δs всѣхъ стержней s опредѣляются уравненіемъ:

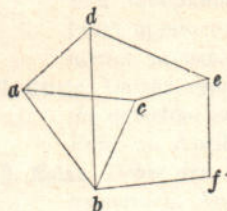
$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \epsilon ts \quad (\text{см. стр. 10}).$$

Найдемъ перемѣщенія узловыхъ точекъ. Въ этомъ и будетъ заключаться задача, геометрическое разрѣшеніе которой составитъ цѣль нашихъ ближайшихъ изслѣдованій.

Узловые точки обозначимъ маленькими буквами, а стержни—арабскими цифрами. Длину стержней s_1, s_2, \dots обозначимъ цифрами 1, 2, \dots , а измѣненія длины стержней $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots$ обозначимъ знаками $\Delta 1, \Delta 2, \dots$.

Мы начнемъ съ разсмотрѣнія самаго простаго и важнаго случая, именно съ изслѣдованія рѣшетки, которая образуется присо-

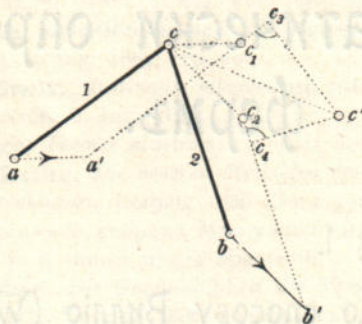
единеніемъ къ треугольнику abc (фиг. 33) новаго узла d , путемъ присоединенія двухъ новыхъ стержней къ узламъ треугольника; затѣмъ къ двумъ произвольнымъ узламъ полученной рѣшетки прибавляютъ новый узелъ e съ двумя новыми стержнями и т. д. Опредѣленіе перемѣщений узловъ подобной рѣшетки при заданномъ измѣненіи длины стержней основывается на рѣшеніи слѣдующей задачи.



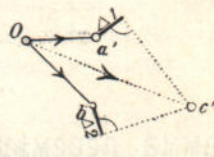
Фиг. 33.

32. Первая основная задача. Узловая точка c связана съ узлами a и b двумя стержнями 1 и 2, длина которыхъ измѣняется на заданныя величины Δ_1 и Δ_2 , сами же точки a и b перемѣщаются въ новое положеніе a' и b' . Отыщемъ перемѣщеніе cc' точки c (которая не лежитъ на одной прямой съ точками a и b), фиг. 34 а.

Для опредѣленія новаго положенія точки c графическимъ путемъ уничтожаемъ въ точкѣ c связь между обѣими стержнями, передвигаемъ стержень 1 параллельно самому себѣ въ положеніе $a'e_1$, а стержень 2 параллельно самому себѣ въ положеніе $b'e_2$. Затѣмъ



Фиг. 34 а.



Фиг. 34 б.

измѣняемъ длину стержней. Если, напр., стержень 1 удлиняется, а стержень 2 укорачивается, то отрѣзокъ $a'e_1$ удлиняютъ на $c_1c_3 = \Delta_1$, а отрѣзокъ $b'e_2$ укорачиваютъ на $c_2c_4 = \Delta_2$. Затѣмъ проводимъ дуги круга, описывая ихъ изъ центровъ a' и b' радиусами, равными по величинѣ длинѣ измѣненныхъ стержней. Точка пересѣченія этихъ дугъ c' дастъ искомое положеніе точки c . Для даннаго случая, когда мы принимаемъ перемѣщенія за весьма малыя величины, можно замѣнить дуги круговъ c_3c' и c_4c' перпендикулярами, восстановленными къ прямымъ $a'e_3$ и $b'e_4$.

Перемѣщеніе cc' слѣдуетъ построить отдѣльно въ *увеличенномъ масштабѣ*. Изъ произвольно выбранной точки O (называемой *началомъ* или *полюсомъ*, фиг. 34 б) откладываемъ отрѣзки $Oa' = aa'$ и $Ob' = bb'$, равные перемѣщеніямъ точекъ a и b по величинѣ, направленію и теченію. Къ полюснымъ лучамъ Oa' и Ob' присоединяють въ точкахъ a' , b' величины линейныхъ удлиненій Δ_1 и Δ_2 , проводя ихъ параллельно стержнямъ 1 и 2, и въ концахъ этихъ отрѣзковъ возставляютъ перпендикуляры, точка пересѣченія которыхъ c' опре-

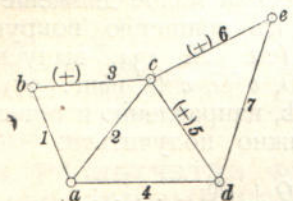
дѣлать искомое перемѣщеніе точки c ; это перемѣщеніе изображается по величинѣ, направленію и теченію лучемъ Oc' .

Особенное вниманіе надо обращать при откладываніи отрѣзковъ $\Delta 1$ и $\Delta 2$. Для этого надо помнить слѣдующее правило:

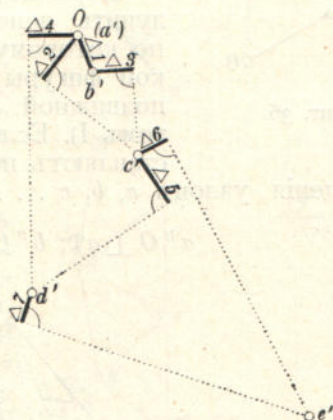
Если узелъ c связанъ съ узломъ a посредствомъ стержня 1, который удлиняется, то точка c перемѣщается относительно a по направленію отъ a къ c ; поэтому отрѣзокъ $\Delta 1$ надо отложить отъ a' по направленію отъ a къ c .

Если узелъ c связанъ съ узломъ b посредствомъ стержня 2, который укорачивается, то точка c перемѣщается относительно b въ направленіи отъ c къ b , поэтому отрѣзокъ $\Delta 2$ надо отложить отъ b' по направленію отъ c къ b .

Теперь легко построить перемѣщенія узловъ рѣшетки, подобной описанной въ № 31; причемъ мы примемъ, что направленіе одного стержня (который долженъ принадлежать одному изъ двухъ треугольниковъ abc и abd , фиг. 33) остается неизмѣннымъ и что перемѣщеніе какой нибудь точки оси этого стержня равно нулю. Возьмемъ какую нибудь рѣшетку, фиг. 35а, и предположимъ,



Фиг. 35 а.



Фиг. 35 б.

что положеніе точки a и направленіе стержня 1 будутъ неизмѣнны. Пусть стержни 3, 5, 6 со знакомъ $(+)$ будутъ растянуты, остальные сжаты.

Возьмемъ какой нибудь полюсъ O , фиг. 35 б. Перемѣщеніе точки a равно нулю, поэтому точка a' совпадаетъ съ O . Перемѣщеніе Ob' точки b равно укороченію $\Delta 1$ стержня 1. Узелъ c связанъ съ a стержнемъ 2 и съ b стержнемъ 3; онъ приближается къ a на $\Delta 2$ и удаляется отъ b на $\Delta 3$. Слѣдовательно, если отложить отъ a' по направленію ca отрѣзокъ $\Delta 2 \parallel 2$ и отъ b' въ направленіи bc отрѣзокъ $\Delta 3 \parallel 3$ и возставить къ концамъ ихъ перпендикуляры, то пересѣченіе этихъ перпендикуляровъ опредѣлитъ перемѣщеніе Oc' точки c . Узелъ d связанъ съ a и c стержнями 4 и 5; перемѣщеніе этого узла опредѣлится, если проведемъ отъ a' по направленію da отрѣзокъ $\Delta 4 \parallel 4$ и отъ c' по направленію cd отрѣзокъ $\Delta 5 \parallel 5$ и въ концахъ ихъ возставимъ перпендикуляры, точка пересѣченія которыхъ будетъ d' . Такимъ же путемъ найдемъ и точку e' .

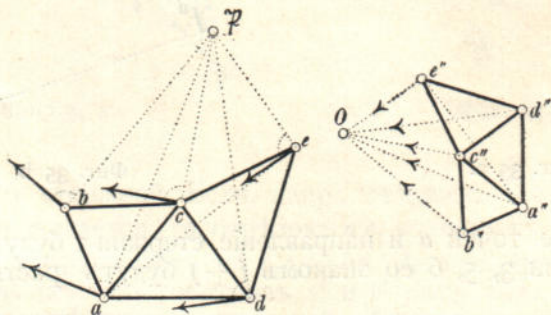
Фиг. 35 б, гдѣ полюсные лучи Ob' , Oc' представляютъ по величинѣ, направленію и теченію перемѣщенія узловъ b, c , называется *диаграммой перемѣщений (планомъ перемѣщений, много-угольникомъ перемѣщений)* данной рѣшетки, построение которой ука-зано впервые Виллио (Williot).

33. Сложение перемѣщений для случая двухъ отдѣльныхъ весьма малыхъ движеній. Движеніе твердаго тѣла. Опредѣлимъ деформацію какого нибудь подпер-таго сочлененнаго статически опредѣлимаго тѣла; примемъ направ-ление одного стержня и одну изъ точекъ оси этого стержня непод-вижными, и построимъ диаграмму перемѣщений по вышеописанному способу; затѣмъ, сочлененному тѣлу, *которое теперь предполагаемъ жесткимъ*, сообщимъ движеніе, допускаемое опорами данного тѣла.

Пусть путь, проходимый узломъ m во время этого втораго движенія, изображается лучомъ $m''O$ (фиг. 36), направленнымъ къ полюсу *). Такимъ образомъ отрѣзокъ $m''m'$ представитъ по величинѣ, направленію и теченію путь узла m для слу-чая двухъ одновременныхъ движеній.

Перемѣщенія точекъ жесткаго тѣла можно по-лучить непосредственно при примѣненіи закона, по которому всякое весьма малое движеніе жест-кой фигуры сводится къ вращенію вокругъ не-подвижной точки \mathfrak{P} (см. № 134, выпускъ III, томъ I). Если лучи $a''O$, $b''O$, $c''O$ (фиг. 37) пред-ставляютъ по величинѣ, направленію и теченію пе-ремѣщенія узловъ a, b, c , то должно получиться:

$$I) \quad a''O \perp a\mathfrak{P}; \quad b''O \perp b\mathfrak{P}; \quad c''O \perp c\mathfrak{P}; \quad \dots \dots ;$$



Фиг. 37.

потому что направленіе перемѣщенія каждой точки жесткой фигуры будетъ перпендикулярно къ прямой, которая соединяетъ эту точку съ мгновеннымъ центромъ вращенія; затѣмъ получимъ:

$$II) \quad \overline{a''O} : \overline{b''O} : \overline{c''O} : \dots \dots = \overline{a\mathfrak{P}} : \overline{b\mathfrak{P}} : \overline{c\mathfrak{P}} : \dots \dots ,$$

*) При сложении перемѣщений, также какъ и при сложении силъ, тре-буется непрерывное круговое направленіе стрѣлокъ.

потому что перемѣщенія точекъ $a, b, c \dots$ пропорціональны соответствующимъ скоростямъ, а эти послѣднія пропорціональны разстоянiемъ точекъ отъ центра вращенiя \mathfrak{P} .

Изъ условiй (I) и (II) выводимъ слѣдующiя правила:

1. Если соединить точки a'', b'', \dots диаграммы перемѣщений прямыми линиями, такъ чтобъ каждому стержню рѣшетки ik соответствовала прямая $i''k''$, то эти прямые образуютъ фигуру, которая подобна движущейся жесткой фигурѣ.

2. Прямая, соединяющая двѣ любыхъ точки фигуры m, n , будетъ перпендикулярна къ прямой, соединяющей соответствующiя точки m'', n'' . (Напр. $a''b'' \perp ab$; $a''e'' \perp ae$, фиг. 37).

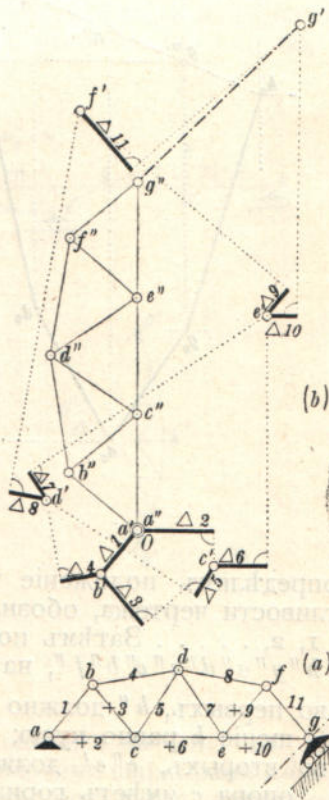
Слѣдовательно, опредѣливъ при помощи условiй движенiя опоръ двѣ точки фигуры $a'' b'' c'' \dots$, мы теперь будемъ въ состоянiи вычертить всю фигуру.

Полученные результаты можно вывести изъ правилъ № 32. Если, напримѣръ, измѣненiя $\Delta 5, \Delta 6, \Delta 7$ длины сторонъ треугольника cde , фиг. 35 а, будутъ равны нулю, то этому треугольнику будетъ соответствовать на фиг. 35 б подобный ему треугольникъ $c'd'e'$, стороны котораго перпендикулярны къ соответствующимъ сторонамъ треугольника cde . Точно также на фиг. 34 прямой, соединяющей двѣ точки a и c жесткаго стержня ($\Delta 1=0$), соответствуетъ на диаграммѣ перемѣщений прямая $a'e'$, перпендикулярная къ прямой ac .

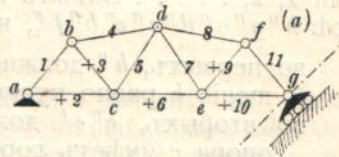
34. Рѣшетчатая ферма съ двумя опорными шарнирами, изъ которыхъ одинъ неподвижный, другой подвижной. Построимъ диаграмму перемѣщений для фермы, фиг. 38 а, имѣющей въ a неподвижный опорный шарниръ, а въ g подвижной шарниръ, который можетъ перемѣщаться по наклонному пути. Знакомъ (+) обозначены стержни растянутые.

Примемъ сначала направлени стержня i неподвижнымъ, тогда упругiя перемѣщенiя $Ob', Oc' \dots Og'$ узловъ $b, c, \dots g$, зависящiя отъ измѣненiя длины стержней, опредѣлятся по способу, приведенному въ № 32. Перемѣщенiя эти должны быть сложены съ тѣми перемѣщенiями $b'' O, c'' O \dots g'' O$, которыя получаютъ узловые

точки при вращенiи жесткой рѣшетки вокругъ точки a , причѣмъ общее перемѣщенiе $g''g'$ точки g , передвигающейся по неподвижной прямой, должно быть параллельно этой прямой. Фигура, образованная изъ точекъ $a'', b'', c'', \dots g''$, будетъ подобна фигурѣ $abcdefg$; опредѣляется же она изъ слѣдующихъ условiй: точка a'' должна совпасть съ a' , потому что a' неподвижно закрѣплена, $a''g''$

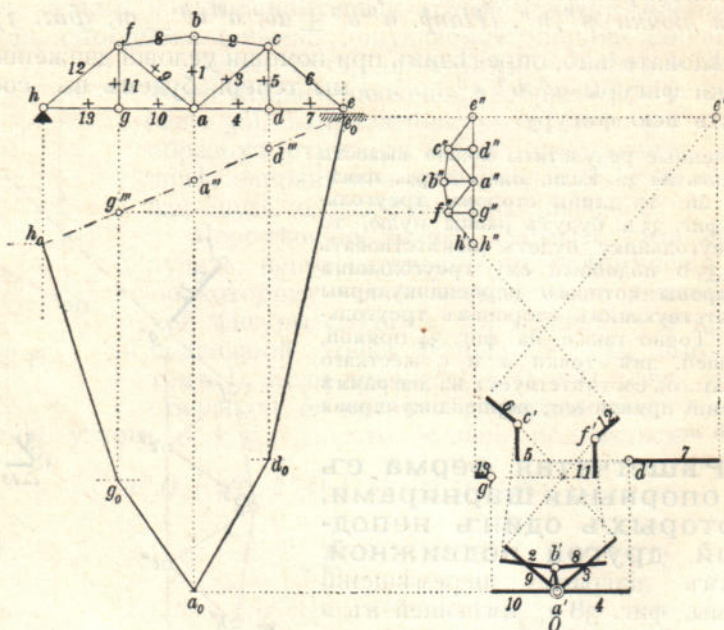


Фиг. 38.



должно быть перпендикулярно къ ag и $g''g'$ должно быть параллельно пути движенія шарнира g . Отрѣзки $b''b'$, $c''c'$, $g''g'$ (на фиг. не показано) представляютъ по величинѣ, направленію и теченію искомыя перемѣщенія узловыхъ точекъ $b, c, \dots g$ *).

Въ большинствѣ случаевъ удобнѣе будетъ выбрать за неподвижную точку и неподвижную прямую—узелъ вблизи середины фермы и стержень, выходящій изъ этого узла, потому что по способу, примѣненному къ фиг. 38, для узловъ, удаленныхъ отъ неподвижной опоры, получаются иногда весьма большія упругія перемѣщенія. Построимъ диаграмму перемѣщений для простой рѣшетчатой фермы, фиг. 39. Закрѣпимъ сначала узелъ a и направленіе стержня



Фиг. 39.

и опредѣлимъ положеніе точекъ $b'e', \dots h'$, причемъ, ради отчетливости чертежа, обозначенія $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ замѣнимъ цифрами 1, 2, Затѣмъ построимъ фигуру $hgadecbf$, подобную фигурѣ $h''g''a''d''e''c''b''f''$, на основаніи слѣдующихъ условій:

- во первыхъ, h'' должно совпасть съ h' , потому что перемѣщеніе h равно нулю;
- во вторыхъ, $e''e'$ должно быть горизонтально, потому что опора e имѣетъ горизонтальное движеніе;
- въ третьихъ, $h''e''$ должно быть перпендикулярно къ he .

Такимъ образомъ перемѣщенія $b''b', c''c', \dots$ узловыхъ точекъ b, c, \dots найдены.

Проектируя точки h', g', a', d', e' въ точки h_0, g_0, a_0, d_0, e_0 , лежащія на вертикаляхъ соотвѣтствующихъ узловъ h, g, a, d, e , и соединяя h_0 и

На фиг. 38 отрѣзокъ Δ_{11} отложенъ по ошибкѣ не въ ту сторону.

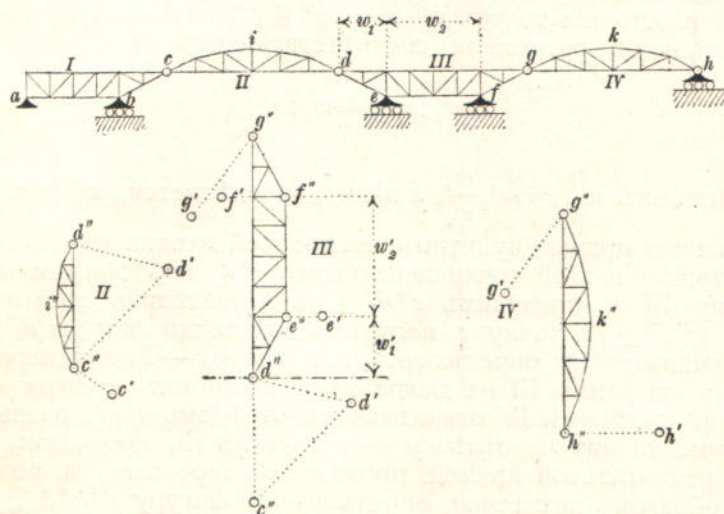
Примѣчаніе переводчиковъ.

e_0 прямой, которая пересѣкаетъ эти вертикали въ точкахъ $g'''a''d'''$, получимъ отрезки $g'''g_0$, $a''a_0$, $d'''d_0$, показывающіе на сколько перемѣстились узлы g , a , d , въ вертикальномъ направленіи. Эти проекціи полныхъ перемѣщеній называются *прогибами*, такъ напр., $g'''g_0$ будетъ *вертикальнымъ прогибомъ рѣшетки въ узлъ g*.

Многоугольникъ $h_0g_0a_0d_0e_0$ называется *многоугольникомъ прогиба* или *линіей прогиба* нижняго пояса; прямая h_0e_0 будетъ *замыкающей линіей*. Если требуется построить только многоугольникъ $h_0g_0a_0d_0e_0$, то для даннаго случая фермы съ горизонтально движущейся опорой нѣтъ никакой надобности строить фигуру $h''g''a''d''e''b''f''$.

35. Рѣшетчатая ферма Гербера. Рассмотримъ два случая:

1. Независимыя фермы соединены съ консолями, по предложенію Гербера, шарнирами. 2. Каждая независимая ферма, какъ и простая балка, имѣетъ одну неподвижную шарнирную опору, другую подвижную. Въ первомъ случаѣ только одна опора будетъ неподвижной, остальные должны быть подвижными. Во второмъ случаѣ каждая ферма съ консолями должна имѣть одну неподвижную и другую подвижную опоры (См. томъ I, выпускъ II—фиг. 86, и выпускъ V—фиг. 351).



Фиг. 40.

Примѣръ перваго расположенія показанъ на фиг. 40. Независимыя фермы II и IV соединены съ консолями шарнирами c, d, g . Опорный шарниръ a неподвижно закрѣпленъ, остальные опорные шарниры b, e, f, h могутъ перемѣщаться по горизонтальному направленію. Построеніе перемѣщеній узловъ для данныхъ измѣненій длины стержней сдѣлано ради удобства на 4 отдѣльныхъ фигурахъ, соответствующихъ четыремъ балкамъ I, II, III, IV. Для каждой балки выбираемъ какую нибудь точку и направленіе стержня, проходящаго черезъ эту точку, считаемъ ихъ неподвижными и опредѣляемъ упрюгій перемѣщеніе узловъ по правиламъ № 32; затѣмъ, принимая эти балки за жесткія фигуры, сообщаемъ имъ то движеніе, которое зависитъ отъ рода опоръ, и наконецъ возстановляемъ опять общую

связь фигуръ въ точкахъ c, d, g . Первая часть этого изслѣдованія—опредѣленіе точки m' , соотвѣтствующей узлу m , — достаточно выяснена въ предыдущихъ примѣрахъ, поэтому на фиг. 40 нанесены только самыя важныя точки, а именно:

точки c', d'	діаграммы перемѣщеній для балки II				
" d', e', f', g'	"	"	"	"	III
" g', h'	"	"	"	"	IV

Діаграмма перемѣщеній для балки I пропущена, такъ какъ эта часть фермы имѣетъ одинъ неподвижный, другой подвижной опорный шарниръ, а этотъ случай уже разсмотрѣнъ въ № 34. Остается объяснить построение фиг. $cid, defg, gkh$, которыя подобны фигурамъ $c''i''d'', d''e''f''g'', g''k''h''$.

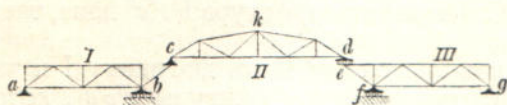
Точка c'' діаграммы II можетъ быть получена, зная перемѣщеніе $c''c'$ точки c (что надо взять изъ пропущенной діаграммы I); относительно точки d'' извѣстно только, что $c''d''$ должно быть $\perp cd$. Въ діаграммѣ III точка e'' лежитъ на горизонтальной прямой, проходящей черезъ e' , а f'' — на горизонтальной прямой, проходящей черезъ f' , потому что опорные шарниры e и f могутъ двигаться по горизонтальному пути. Если обозначить буквами w'_1 и w'_2 вертикальныя разстоянія точекъ d'' и e'' , e'' и f'' , затѣмъ буквами w_1, w_2 — горизонтальныя разстоянія соотвѣтствующихъ точекъ d, e, f , то получимъ:

$$w'_1 : w'_2 = w_1 : w_2,$$

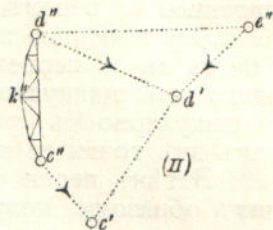
откуда имѣемъ $w'_1 = w'_2 \frac{w_1}{w_2}$, а этимъ опредѣляется, на фиг. 40, горизонтальная прямая (пунктиръ), на которой должна лежать точка d'' . Для нахожденія этой точки переносимъ $c''d'$ изъ діаграммы II въ діаграмму III и проводимъ $c''d'' \perp cd$. Опредѣливъ еще помощью прямой $d''e'' \perp de$ точку e , получимъ двѣ точки фигуры $d''e''f''g''$, а двѣ точки вполне опредѣляютъ всю фигуру. — Теперь переносимъ $d'd''$ изъ діаграммы III на діаграмму II и строимъ фигуру $c''i''d''$, затѣмъ на діаграммѣ IV откладываемъ отрѣзокъ $g'g''$, равный и параллельный такому-же отрѣзку на діаграммѣ III, проводимъ $g''h'' \perp gh$ до горизонтальной прямой, проходящей черезъ h' , и получаемъ такимъ образомъ двѣ точки, опредѣляющія фигуру $g''k''h''$.

Примѣръ втораго расположенія приведенъ на фиг. 41. Ферма имѣетъ двѣ неподвижныя опоры a и g и двѣ подвижныя b и f , перемѣщающіяся по горизонтальному пути. Независимая ферма II связана съ фермой I шарниромъ c , на другомъ же концѣ имѣетъ скользящую опору d . Построимъ по правиламъ № 34 діаграммы перемѣщеній для фермъ I и III. Закрѣпимъ въ фермѣ II произвольный узелъ и направление стержня, проходящаго черезъ этотъ узелъ, и сообщимъ этой фермѣ движеніе, вслѣдствіе котораго восстанавливается связь между фермами I и II и удовлетворяется условіе равенства вертикальныхъ проекцій перемѣщеній точекъ d и e . Затѣмъ построимъ фигуру $c''k''d''$, подобную фигурѣ ckd ; для этого откладываемъ отрѣзокъ $c''c'$, который равняется по величинѣ, направленію и теченію пути узла c , полученному изъ діаграммы перемѣщеній I, и потомъ — отрѣзокъ $c''d'$, который равняется перемѣщенію узла c , взятому изъ діаграммы перемѣщеній III. Затѣмъ проводимъ $c''d'' \perp cd$

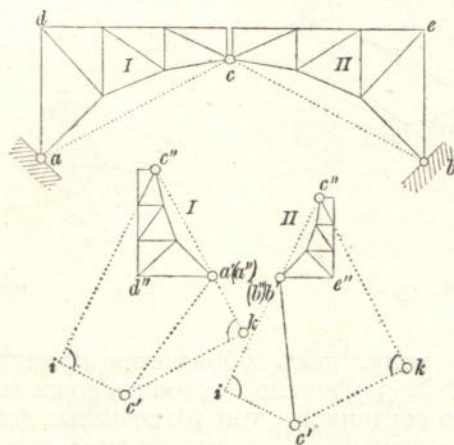
до горизонтальной прямой, проходящей через точку e'' ; тогда отрезокъ $d''d'$ представить по величинѣ, направленію и теченію перемѣщеніе точки d . Фигура $e''k''d''$ опредѣляется вполне двумя точками.



Фиг. 41.



36. Трехшарнирная арочная ферма. Изслѣдуемъ сначала отдѣльно каждую изъ сочлененныхъ частей I и II, которые связаны между собой среднимъ шарниромъ c , а въ точкахъ a и b опираются на неподвижные шарниры. Въ каждой половинѣ закрѣпимъ какой нибудь узелъ и направленіе стержня, проходящаго черезъ этотъ узелъ. Затѣмъ сообщимъ этимъ частямъ фермы, принимая ихъ за жесткія, движеніе, которое удовлетворяло бы условіямъ закрѣпленія опоръ и возстановляло бы въ точкѣ c связь обѣихъ



Фиг. 42.

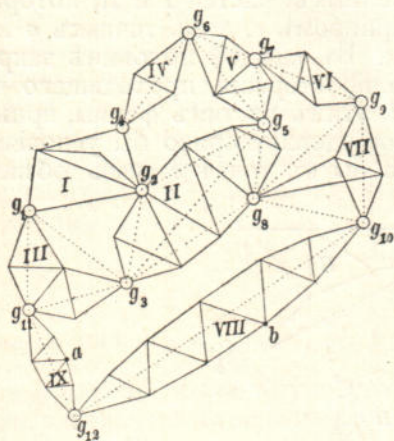
половинъ. На фиг. 42 дано только положеніе точекъ a' , b' , съ соответствующихъ шарнирамъ a , b , c ; точки эти взяты изъ диаграммъ перемѣщеній I и II; другія точки m' , соответствующія остальнымъ узламъ m , на фигурѣ не нанесены. Для построенія фигуръ $a''c''d''$ и $b''c''e''$, подобныхъ фигурамъ acd и bce , имѣемъ слѣдующія условія:

1. Перемѣщеніе $a''a'$ точки a равно нулю; точка a'' должна совпасть съ точкой a' .
2. На этомъ же основаніи точка b'' должна совпасть съ b' .
3. Въ диаграммѣ I $a''c''$ должно быть $\perp ac$, а въ диаграммѣ II: $b''c'' \perp bc$.
4. Диаграммы I и II должны доставить для перемѣщенія точки c одну и ту же величину $c''c'$.

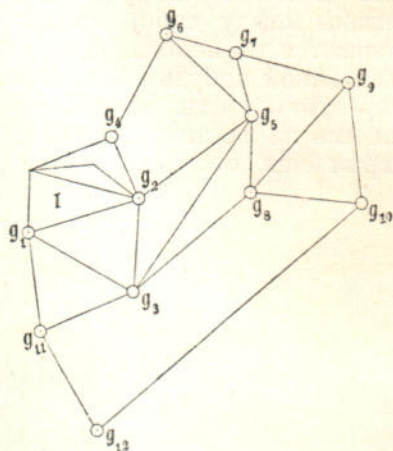
Затѣмъ проводимъ въ діаграммѣ I черезъ точку a' прямую, перпендикулярную къ ac , а черезъ c' прямую параллельно ac , которая встрѣчаетъ первую прямую въ точкѣ k ; такимъ путемъ получаемъ проекцію kc' перемѣщенія $c''c'$ на направленіи ac .

Эту проекцію переносимъ на діаграмму II, въ точкѣ k возста- вляемъ къ $c'k$ перпендикуляръ и опредѣляемъ точку пересѣченія c'' этого перпендикуляра съ прямой $b''c''$, проведенной черезъ b'' перпендикулярно къ прямой bc . Слѣдовательно, фигура $b''c''e''$ дана, такъ какъ двѣ точки ея извѣстны.

Затѣмъ переносимъ kc'' изъ діаграммы II въ діаграмму I и такимъ образомъ получаемъ двѣ точки (a'' и c'') фигуры $a''c''d''$, которую уже легко построить. На діаграммѣ II находимъ также проекцію ic' пути $c''c'$ на направленіи bc , переносимъ ее на діаграмму I и затѣмъ опредѣляемъ c'' , проводя $c''i \perp c'i$.



Фиг. 43.

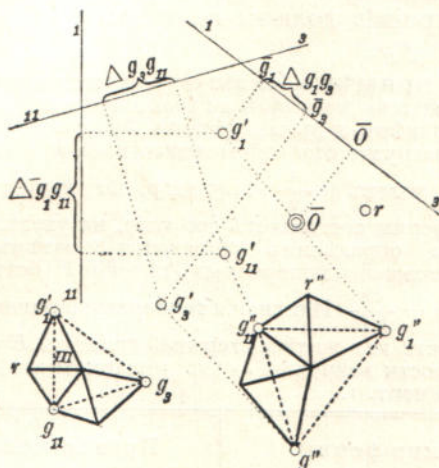


Фиг. 44.

37. Подобно тому, какъ образуется простѣйшее сочлененіе изъ стержней (см. № 31), можно построить сочлененіе изъ жесткихъ фигуръ. Для этого соединяемъ три рѣшетчатая фигуры I, II, III помощью трехъ шарнировъ g_1, g_2, g_3 въ *треугольную фигуру*, фиг. 43, къ этой фигурѣ присоединяемъ шарнирами g_4 и g_5 двѣ новыхъ жесткихъ фигуры IV и V, которыя скрѣплены другъ съ другомъ шарниромъ g_6 ; затѣмъ подобнымъ же путемъ присоединяемъ еще двѣ жесткихъ фигуры VI и VII и т. д. Если всѣ отдѣльныя жесткія фигуры образованы по правилу № 31, то мы будемъ въ состояніи построить діаграмму перемѣщеній для всей рѣшетки на основаніи правилъ № 32, принимая направленіе какого нибудь стержня (принадлежащаго обыкновенно треугольной фигурѣ I, II, III) и одну точку оси этого стержня неподвижными; затѣмъ, помощью № 33, мы можемъ разрѣшить эту задачу и въ томъ случаѣ, когда составная рѣшетчатая фигура будетъ опираться на землю статически опредѣлимымъ образомъ.

Изслѣдуемъ рѣшетчатую фигуру, представленную на фиг. 43. За неподвижное направленіе примемъ направленіе стержня фигуры I, остальные же жесткія фигуры замѣнимъ воображаемыми стерж-

нями (фиг. 44), которымъ припишемъ измѣненія длины, равныя дѣйствительнымъ взаимнымъ перемѣщеніямъ конечныхъ шарнировъ этихъ фигуръ; такъ напр., измѣненіе длины воображаемаго стержня $g_2 g_3$ равно взаимному перемѣщенію пары шарнировъ g_2, g_3 , принадлежащихъ жесткой фигурѣ II. Такимъ путемъ получимъ простѣйшую рѣшетку, которую мы описали въ № 31; теперь мы въ состояніи опредѣлить перемѣщенія шарнировъ въ такомъ порядкѣ: $g_3, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}$, а затѣмъ можемъ удовлетворить и условіямъ дѣйствительныхъ опорныхъ закрѣпленій (по № 33). Для рѣшенія второй части задачи необходимо будетъ соединить соответствующимъ образомъ опорныя точки съ шарнирами помощью стержней; такъ напр., если данная составная рѣшетка имѣетъ два опорныхъ шарнира a и b (изъ которыхъ одинъ долженъ быть неподвижнымъ, а другой подвижнымъ), то придется добавить еще стержни $ag_{11}, ag_{12}, bg_{10}, bg_{12}$.



Фиг. 45.

Полученную такимъ путемъ диаграмму перемѣщеній назовемъ диаграммой I; эта диаграмма содержитъ перемѣщенія $m''m'$ всѣхъ узловыхъ точекъ m жесткой фигуры I, соответствующія дѣйствительнымъ опорнымъ закрѣпленіямъ, затѣмъ перемѣщенія $g''g'$ всѣхъ шарнировъ g и перемѣщеніе подвижнаго опорнаго шарнира.

Для того чтобъ получить измѣненія длины воображаемыхъ стержней, которые требуются для составленія диаграммы I, придется вычертить отдѣльныя диаграммы перемѣщеній для каждой жесткой фигуры, причемъ въ каждой фигурѣ надо закрѣпить направление одного стержня и одну точку оси этого стержня. Фиг. 45 представляетъ часть такой диаграммы перемѣщеній для жесткой фигуры III, по которой можно опредѣлить измѣненія разстояній $\Delta(g_1g_1), \Delta(g_3g_{11}), \Delta(g_{11}g_1)$. Для опредѣленія $\Delta(g_1g_3)$ спроектируемъ лучи Og_1' и Og_3' на прямую 1—3, параллельную прямой g_1g_3 , получимъ $\bar{O}g_1$ и $\bar{O}g_3$. Отрѣзокъ $\bar{O}g_1$ представляетъ перемѣщеніе шарнира g_1 по направленію g_3g_1 , затѣмъ $\bar{O}g_3$ представляетъ перемѣщеніе g_3 по тому же направленію; слѣдовательно, отрѣзокъ $\bar{g}_1\bar{g}_3 = \Delta(g_1g_3)$ дастъ взаимное перемѣщеніе пары точекъ g_1, g_3 ; это перемѣщеніе имѣетъ то же направленіе, что и отрѣзокъ g_1g_3 , поэтому оно представитъ удлиненіе воображаемаго

стержня g_1g_3 . Подобнымъ же путемъ опредѣлимъ величину $\Delta(g_3g_{11})$, проектируя точки g'_3 и g'_{11} на прямую 3—11, параллельную прямой g_3g_{11} , а также найдемъ $\Delta(g_1g_{11})$ помощью проекцій g'_1 и g'_{11} на прямую 1—11. Для $\Delta(g_1g_{11})$ получается на фиг. 45 положительное значение, для $\Delta(g_3g_{11})$ отрицательное; слѣдовательно, воображаемый стержень g_3g_{11} укорачивается.

Когда діаграмма I построена, то, для того чтобъ получить дѣйствительныя перемѣщенія $r''r'$ всѣхъ узловъ фигуры III, можно воспользоваться діаграммой, построенной для фигуры III, фиг. 45. Съ этой цѣлью переносятъ съ діаграммы I дѣйствительныя перемѣщенія $g_1''g_1'$, $g_3''g_3'$, $g_{11}''g_{11}'$ шарнировъ $g_1g_3g_{11}$ на діаграмму III и затѣмъ строятъ фигуру $g_1''g_3''r''g_{11}''$, подобную фигурѣ III; найденная фигура можетъ быть построена по двумъ точкамъ, такъ что остальными точками можно проверить точность чертежа. Изъ діаграммы I переносимъ въ діаграмму III отрезки $g_1''g_1'$, $g_3''g_3'$, $g_{11}''g_{11}'$; при тщательномъ построеніи должны получить: $g_1''g_3'' \perp g_1g_3$, $g_3''g_{11}'' \perp g_3g_{11}$ и $g_{11}''g_1'' \perp g_{11}g_1$.

Численный примѣръ. Изслѣдуемъ стропильную ферму (представленную на листѣ чертежей 1 въ масштабѣ 1 : 100). Упрощенія, которыя могутъ встрѣтяться въ данномъ примѣрѣ и въ слѣдующихъ, будутъ указаны въ своемъ мѣстѣ.

Вертикальная нагрузка отъ собственнаго вѣса фермы и снѣга составляетъ 1125 к. для среднихъ узловъ и $\frac{1}{2} \cdot 1125$ клгр. для крайнихъ. Давленіе вѣтра на лѣвую половину фермы составляетъ 700 клгр. на узелъ. Помощью діаграммы напряженій (Сремона) опредѣлимъ напряжения S ; затѣмъ составимъ таблицу значений S , длины стержней s , поперечныхъ сѣченій F (безъ вычета на заклепки и измѣненія длины $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$). Измѣненія температуры во вниманіе не принимаемъ. Коэффициентъ упругости для желѣза стержней примемъ: $E = 1\ 800\ 000$ клгр./см²). Для большей наглядности величины Δs (въ миллиметрахъ) вписаны также въ сѣтъ фермы на листѣ черт. 1.

Лѣвая половина фермы.					Правая половина фермы.				
Стержни	S	F	s	Δs	Стержни	S	F	s	Δs
1	—9910	44	212	—0,27	1'	—9530	44	212	—0,26
2	—9110	44	212	—0,24	2'	—8730	44	212	—0,23
3	—8320	44	212	—0,22	3'	—7940	44	212	—0,21
4	—7520	44	212	—0,20	4'	—7140	44	212	—0,19
5	+8970	13	245	+0,94	5'	+6970	13	245	+0,73
6	+7470	13	245	+0,78	6'	+6170	13	245	+0,65
7	+4110	12	245	+0,48					
8	+4210	12	245	+0,48	8'	+2820	12	245	+0,32
9	+5710	12	245	+0,65	9'	+3620	12	245	+0,41
10	—1500	9	122	—0,11	10'	—800	9	122	—0,06
11	+1500	5	245	+0,41	11'	+800	5	245	+0,22
12	—3000	16	245	—0,26	12'	—1600	16	245	—0,14
13	+1500	5	245	+0,41	13'	+800	5	245	+0,22
14	—1500	9	122	—0,11	14'	—800	9	122	—0,06
	клгр.	см ² .	см.	мм.		клгр.	см ² .	см.	мм.

*) Вообще при расчетѣ деформаций рекомендуется брать E не слишкомъ большимъ, для того чтобъ принять во вниманіе трудно опредѣляемое вліяніе ослабленія заклепками и неточность сборки.

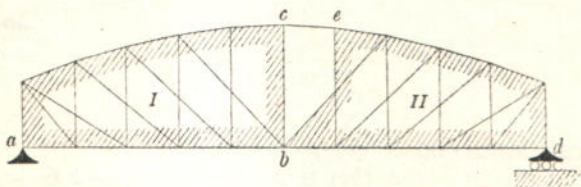
Исследуемая ферма состоит из двух рѣшетчатыхъ частей aeh и iqh (I и II), соединенныхъ шарниромъ h и стержнемъ ai .

Построимъ, фиг. 47, диаграмму перемѣщений для фиг. I, предполагая, что узелъ a и направление стержня ab неподвижны. Всѣ перемѣщенія вычертимъ въ масштабѣ, увеличенномъ въ 20 разъ. O — есть произвольно взятый полюсъ; a совпадаетъ съ O . Перемѣщеніе Ob' точки b равно измѣненію длины Δ_{12} стержня 12. Точки e', d', e' и f', g', h' опредѣляются по способу, описанному въ № 32. Затѣмъ строимъ диаграмму перемѣщений II (красную) для части II, предполагая, что закрѣплены точка i и направление стержня ik . Опредѣливъ точки k', l', m', q' и n', p', h' , найдемъ измѣненіе $\Delta(hi)$ разстоянія hi какъ проекцію отрезка $h'i'$ на линіи, параллельной прямой hi ; точно такимъ же путемъ найдемъ измѣненія $\Delta(iq)$ и $\Delta(hq)$ разстояній iq и hq . [Въ данномъ примѣрѣ можно было бы и не чертить диаграммы II, потому что $\Delta(hi)$ равно суммѣ измѣненій длины стержней g' и h' , т. е. $\Delta(hi) = +0,41 + 0,32 = +0,73$ мм.; точно также найдемъ: $\Delta(hq) = \Delta_4' + \Delta_3' + \Delta_2' + \Delta_1' = -0,19 - 0,21 - 0,23 - 0,26 = -0,89$ мм. и $\Delta(iq) = \Delta_6' + \Delta_5' = +0,65 + 0,73 = +1,38$ мм.].

Теперь можно окончить построение диаграммы I. Съ помощью значеній $\Delta(hi)$ и Δ_7 находимъ положеніе i' , затѣмъ съ помощью $\Delta(hq)$ и $\Delta(iq)$ — положеніе q' и наконецъ принимаемъ во вниманіе закрѣпленіе опоръ. Такъ какъ e неподвижно, а q можетъ перемѣщаться по горизонтальной прямой, то e'' совпадаетъ съ e' , а точка q'' будетъ точкой пересѣченія прямой $e''q''$, проведенной перпендикулярно къ eq , съ горизонтальной прямой, проходящей черезъ точку q' . Точками e'' и q'' вполне опредѣляется фигура $e''d''b''g''h''f''a''i''q''$, подобная данной рѣшеткѣ; а вмѣстѣ съ этимъ можно опредѣлить и перемѣщенія всѣхъ узловъ части I, а также узловъ i и q .

Для опредѣленія перемѣщений узловъ части фермы II переносимъ перемѣщенія $q''q'$ и $h''h'$ изъ диаграммы I въ диаграмму II; такимъ путемъ найдемъ двѣ точки фигуры $q''m''k''p''h''n''i''l''$. При тщательномъ вычерчиваніи должны получить $q''h'' \perp qh$, затѣмъ перемѣщеніе $i''i$, должно согласоваться по величинѣ и направленію съ перемѣщеніемъ $i''i$, полученнымъ изъ диаграммы I. [Такъ какъ поясъ hk — прямой, то точку k' на диаграммѣ I можно было бы опредѣлить съ помощью Δ_{12}' и $\Delta(hk) = -0,19 - 0,21 = -0,40$ мм., точку n' — съ помощью Δ_{13}' и Δ_8' , точку p' — съ помощью Δ_3' и Δ_{14}' , а затѣмъ l' и m' . Поэтому при изслѣдованіи данной фермы диаграмму II можно и не чертить; въ случаѣ же, если h, p, k, m, q или h, n, i или i, l, q не лежатъ на одной прямой, то эта диаграмма необходима; напр. для стропильной фермы, фиг. 180 — выпускъ III, томъ II].

Въ данномъ примѣрѣ наибольшее перемѣщеніе принадлежитъ узлу g $\overline{g'g'} = 7,6$ мм. Горизонтальное перемѣщеніе точки $q - q'q' = 6,5$ мм.

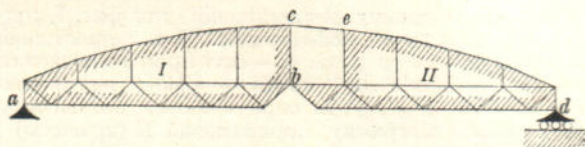


Фиг. 49.

На фиг. 49 до 52 показаны различныя фермы, для которыхъ можно получить диаграммы перемѣщений по приему, выясненному только что на частномъ примѣрѣ.

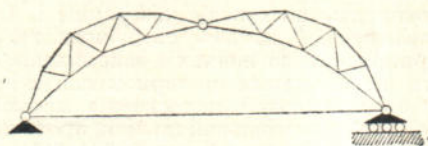
Простая рѣшетчатая ферма, фиг. 49, состоитъ изъ двухъ частей abc и bde (края ихъ заштрихованы) и изъ стержня ce . Въ тѣхъ точкахъ, гдѣ диагонали пересѣкаются со стойками, соединеній не предполагается.

На фиг. 50 представлена жесткая шарнирная арка (см. томъ I, № 210—выпускъ V), которая можетъ быть разложена на части I,



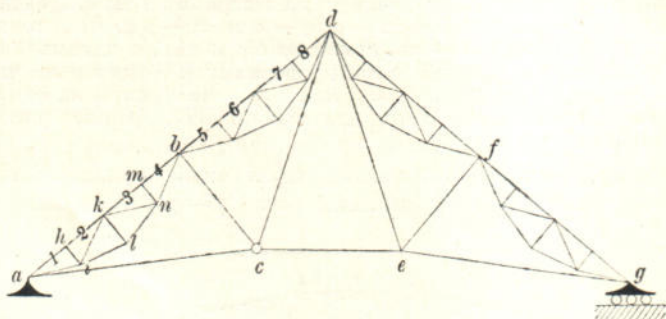
Фиг. 50.

II и стержень ce ; на фиг. 51 представлена трехшарнирная рѣшетчатая арка съ затяжкой.



Фиг. 51.

При изслѣдованіи деформаций фермы, представленной на фиг. 52, закрепляемъ точку c и направленіе стержня ce и опредѣляемъ точку e' , затѣмъ находимъ



Фиг. 52.

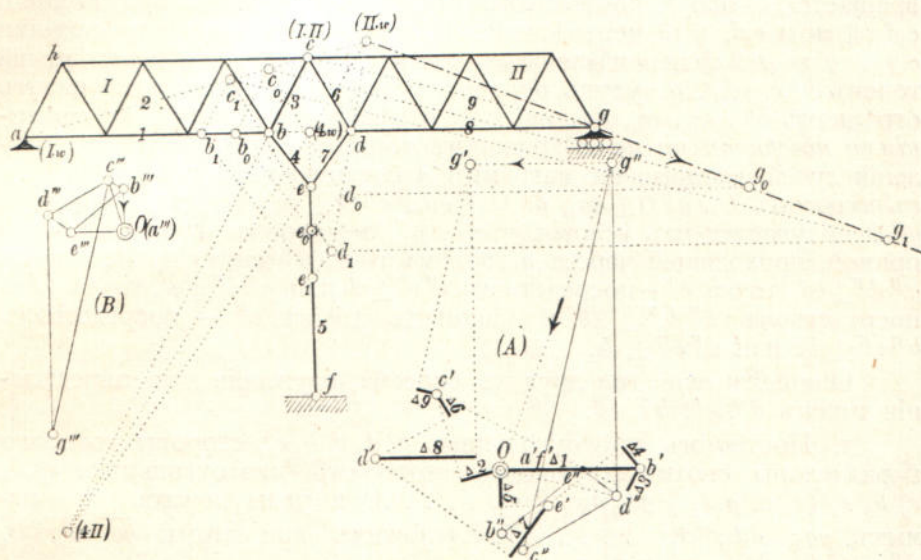
$$\begin{array}{ll} d' & \text{съ помощью } \Delta(dc) \text{ и } \Delta(de) \\ b' & \text{" } \Delta(bc) \text{ и } \Delta(bd) = \Delta 5 + \Delta 6 + \Delta 7 + \Delta 8 \\ a' & \text{" } \Delta(ac) \text{ и } \Delta(ab) = \Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 + \Delta 4, \end{array}$$

и наконецъ подобнымъ же путемъ опредѣляемъ f' и g' . Остается принять во вниманіе условія закрепленія опоръ, причемъ найденныя перемѣщенія $b''b'$, $d''d'$, $f''f'$, $g''g'$, точекъ b, d, f, g переносятъ въ діаграммы, построенныя по № 32 для отдѣльныхъ жесткихъ фигуръ, и пристраиваютъ къ нимъ фигуры $a''b'', b''d'', d''f'', f''g''$, подобныя жесткимъ фигурамъ ab, bd, df, fg .

38. Примѣры рѣшетчатыхъ фермъ. Если имѣемъ рѣшетку нѣсколько другого рода, чѣмъ ранѣе изслѣдованная, то ее нужно обратить — лучше всего съ помощью измѣненія опоръ —

въ такую рѣшетку, для которой мы можемъ построить диаграммы перемѣщений по правиламъ № 32; причемъ, въ случаѣ необходимости, придется раньше построить особенныя диаграммы для каждой отдѣльной жесткой фигуры, чтобъ опредѣлить взаимныя перемѣщенія тѣхъ шарнировъ, которыми одна жесткая фигура соединяется съ другими. Затѣмъ устранимъ вновь прибавленныя опоры и сообщимъ тѣмъ сочленениямъ подвижной рѣшетки, которыя мы считали жесткими, такое перемѣщеніе и вращеніе, при которыхъ будутъ удовлетворены условія закрѣпленія опоръ. Для поясненія этого способа приводимъ слѣдующіе примѣры.

1. Примѣръ. Рѣшетка на фиг. 53 состоитъ изъ двухъ простыхъ фигуръ I и II, соединенныхъ другъ съ другомъ шарниромъ c и двумя стержнями 4 и 7 съ вершиной e качающейся колонны. Опора a закрѣплена, опора g имѣетъ горизонтальное движеніе. Для опредѣленія перемѣщений узловъ данной рѣшетки строимъ сначала отдѣльныя диаграммы (I) и (II) для фигуръ I и II (по правиламъ № 32), изъ которыхъ опредѣляемъ измѣненія длины $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_8, \Delta_9$ отрѣзковъ ab, ac, dg, eg , которые обозначены цифрами 1, 2, 8, 9. Затѣмъ, считая узелъ g свободнымъ и предполагая, что b можетъ перемѣщаться по направленію ab , строимъ диаграмму, фиг. 53 А.



Фиг. 53.

O —произвольно выбранный полюсъ. a' и f' совпадаютъ съ O' такъ какъ a и f неподвижны. Горизонтальный отрѣзокъ $Ob' = \Delta_1$ даетъ перемѣщеніе точки b . Посредствомъ Δ_2 и Δ_3 опредѣляемъ точку c' (по правиламъ № 32), а затѣмъ точку e' посредствомъ Δ_4 и Δ_5 , d' посредствомъ Δ_6 и Δ_7 и ng' — посредствомъ Δ_8 и Δ_9 *).

*) Въмѣсто перемѣщенія фигуры I въ точкѣ b можно принять неподвижнымъ направленіе стержня ah . Диаграмма (I) становится излишней, такъ какъ каждая узловая точка фигуры I можетъ быть соединена со стержнемъ ah двумя стержнями. Диаграмму (II) при принятыхъ выше опорахъ можно также пропустить; вычерчиваніе отдѣльныхъ диаграммъ для составныхъ частей рѣшетки даетъ чертежу большую наглядность.

Устранимъ теперь подвижность точки b и обратимъ рѣшетку въ кинематическую цѣпь; затѣмъ повернемъ фигуру I вокругъ опорнаго шарнира a , такъ чтобы точка g получила перемѣщеніе (на диаграммѣ A оно представлено лучемъ $g''O$), которое, будучи сложено съ прежде найденнымъ Og' , дастъ общее перемѣщеніе $g''g'$, и наконецъ опредѣлимъ перемѣщенія $d''O$, $e''O$, $e''O$, $b''O$, произведенныя во время этого движенія узлами d , e , e , b .

Для болѣе простаго рѣшенія этой задачи можно воспользо-ваться изслѣдованіями кинематической цѣпи, сдѣланными въ I томѣ (Выпускъ III, § 30—32). Законы, выведенные тамъ для скоростей точекъ кинематической цѣпи, могутъ быть примѣнены также къ перемѣщеніямъ этихъ точекъ, если только всѣ перемѣщенія совершаются въ одинъ и тотъ же промежутокъ времени и если перемѣщенія пропорціональны скоростямъ.

Отложимъ произвольно взятое по величинѣ перемѣщеніе точки b — bb_0 отъ точки b по направленію луча ba , проведеннаго къ мгновенному центру вращенія (полюсу вращенія) a и проведемъ $b_0c_0 \parallel bc$ до лучей ca , тогда отрѣзокъ cc_0 представить по величинѣ перемѣщеніе точки c . Проведя затѣмъ $b_0e_0 \parallel be$, получимъ въ отрѣзкѣ ee_0 величину перемѣщенія точки e , принадлежащей колоннѣ, которая вращается около f ; послѣ этого можемъ опредѣлить при помощи $c_0d_0 \parallel cd$ и $e_0d_0 \parallel ed$ перемѣщеніе dd_0 точки d , а также при помощи $c_0g_0 \parallel cg$ и $d_0g_0 \parallel dg$ перемѣщеніе gg_0 точки g . Направленія перемѣщенийъ точекъ b , c , e , d , g будутъ перпендикулярны къ соответствующимъ отрѣзкамъ bb_0 , cc_0 , ee_0 , dd_0 , gg_0 (эти отрѣзки называются „*перемѣщеніями повернутыми на 90°*“); такимъ образомъ опредѣляются направленія лучей, которые на диаграммѣ A соединяють точки $g''d''c''$. . . съ полюсомъ O . $g''O \perp gg_0$, $d''O \perp dd_0$, $c''O \perp cc_0$ и т. д. Длина луча $g''O$ получается изъ условія, чтобъ g'' лежало на горизонтальной прямой, проходящей черезъ g' ; затѣмъ точка d'' дается посредствомъ $g''d'' \perp gd$, точка c'' — посредствомъ $c''d'' \perp cd$ или $g''c'' \perp gc$, точка b'' — посредствомъ $c''b'' \perp cb$ и наконецъ точка e'' — посредствомъ $b''e'' \perp be$ или $d''e'' \perp de$.

Опишемъ еще три другихъ способа, служащіе для опредѣленія точекъ d'' , e'' , b'' , c'' .

1. Построимъ многоугольникъ $g_1d_1e_1b_1c_1$, стороны котораго параллельны соответствующимъ сторонамъ многоугольника $g_0d_0e_0b_0c_0$ (т. е. $g_1d_1 \parallel gd$, $d_1e_1 \parallel de$,), а углы лежатъ на прямыхъ gg_0 , dd_0 , ee_0 ; Отложимъ при этомъ $gg_1 = g''O$, $d''O = dd_1$, $e''O = ee_1$ и т. д.

2. Найдемъ полюсы, вокругъ которыхъ вращаются отдѣльныя части подвижной кинематической цѣпи относительно неподвижной опоры (обозначимъ ее черезъ w), которой принадлежатъ неподвижныя точки a и f . Полюсъ (I. w) фигуры I совпадаетъ съ точкой I; полюсъ (I. II) фигуры I относительно фигуры II совпадаетъ съ шарниромъ c . Части I, 4, 5 кинематической цѣпи образуютъ съ опорой шарнирный четырехугольникъ, поэтому полюсъ (4. w) части 4 относительно w лежитъ въ точкѣ пересѣченія прямыхъ ab и fe . Точно также полюсъ (4. II) части 4 относительно II лежитъ въ точкѣ перемѣщенія прямыхъ cb и de ; полюсъ же (II. w) части II относительно w опредѣляется тѣмъ условіемъ, чтобъ три точки (I. w), (I. II) и (II. w) лежали на одной прямой; то же самое касается и трехъ точекъ (4. II), (4. w), (II. w). Положеніе полюса (II. w) опредѣляетъ на-

правления gg_0 и dd_0 , после чего уже легко найти точки g'' , d'' , e'' , b'' , e'' по способу, описанному раньше.

3. Возьмем сначала произвольную величину перемещения точки b , принадлежащей фигуре I , которая вращается около a , и отложим ее на особенной диаграмме (фиг. 53 B) по линии $b''O$, перпендикулярной к прямой ba , причем совершенно безразлично, где лежит b'' ниже или выше полюса. Затем определим пути, пройденные одновременно точками c, e, d, g , проводя по порядку:

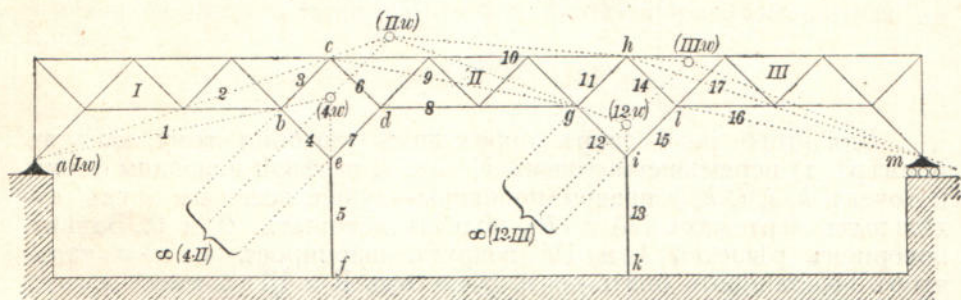
$$\begin{array}{l} b'''c''' \perp bc \text{ и } a'''e''' \perp ae, \\ b'''e''' \perp be \text{ „ } f'''e''' \perp fe \text{ (} \approx \text{)}, \\ c'''d''' \perp cd \text{ „ } e'''d''' \perp ed \\ c'''g''' \perp cg \text{ „ } d'''g''' \perp dg. \end{array}$$

Лучи, соединяющіе точки b''' , c''' , e''' , d''' , g''' съ полюсомъ O представляютъ по величинѣ и направленію перемѣщенія точекъ b , c , e , d , g .

Теперь на диаграммѣ (А) опредѣлимъ при помощи $g''O \perp g'''O$ то перемѣщеніе, которое получитъ точка g , если возстановить для g условіе движенія этой опоры: затѣмъ опредѣляемъ перемѣщенія $e''O, d''O, \dots$ строя фигуру $g''e''d''\dots$, стороны которой параллельны соответствующимъ сторонамъ фигуры $g'''e'''d''' \dots$.

Фиг. (B) представляет ничто иное, как диаграмму перемещения Виллио той кинематической цѣпи, въ которую обращается данная рѣшетка при удаленіи подвижной опоры g^{**}).

Наконецъ перенесемъ найденныя вышеописаннымъ способомъ перемѣщенія $b''b'$, $c''c'$, $d''d'$, $g''g'$ изъ діаграммы (A) въ отдѣльныя діаграммы, вычерченныя для фигуръ (I) и (II), и построимъ въ діаграммѣ (I) фигуру $a''b''c''$, подобную фигурѣ abc (точка a'' совпадаетъ



Фиг. 54.

съ точкой a' этой диаграммы), а въ диаграммѣ (II) фигуру $e''d''g''$, подобную фигурѣ cdg . Теперь легко построить перемѣщенія $m''m'$ всѣхъ узловъ m фигуръ I и II.

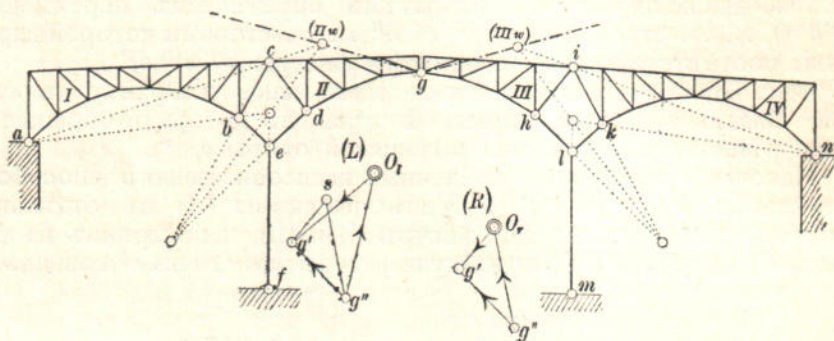
*) f''' совпадаетъ съ a''' .

**) При построении фигуры (В) мы имеем в действительности дело с применением основной задачи № 32, что ясно указывает фиг. 34. Если $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$, то примыма ac и cb на фиг. 34 а соответствуют перпендикулярным к ним прямым $a'e'$ и $e'b'$ диаграммы перемещений фиг. 34 б. См. также конец № 33.

Подобнымъ же путемъ можно изслѣдовать рѣшетку, представленную на фиг. 54. Для этого предположимъ, что точка a и направление ab неподвижны, а опора m устранена. Затѣмъ повернемъ фигуру I около точки a такъ, чтобы точка m получила общее горизонтальное перемѣщеніе $m''m'$. Полюсы, вокругъ которыхъ вращаются фигуры II и III вслѣдствіе этого втораго движенія, показаны на фиг. 54 *). Вмѣсто этого можно воспользоваться также перемѣщеніями, повернутыми на 90° , или діаграммой Вилліо. Читателю рекомендуется построить соотвѣтствующія фигуры самому **).

2. Примѣръ. На фиг. 55 показана статически опредѣлимая апрочная ферма въ 3 пролета. Она состоитъ изъ четырехъ сочлененныхъ рѣшетокъ, соединенныхъ шарнирами e, g, i . Рѣшетки I и II связаны двумя стержнями съ качающеюся колонной ef ; подобнымъ же путемъ соединены рѣшетки II и IV съ колонной lm . У a и n имѣются неподвижные опорные шарниры.

При построеніи діаграммы перемѣщеній для этой фермы предположимъ сначала, что въ точкѣ g уничтожена связь между рѣшетками II и III, и что точка b будетъ перемѣщаться по направлению ab , а точка k —по направлению nk .



Фиг. 55.

Для этого рода опоръ опредѣлимъ (подобно тому, какъ въ примѣрѣ 1) перемѣщенія точекъ b, c, e, d, g лѣвой половины фермы и точекъ k, i, l, h, g правой половины—лучше всего на двухъ отдѣльныхъ чертежахъ (L) и (R), полюсы которыхъ O_L и O_R . Затѣмъ повернемъ рѣшетки I и IV вокругъ шарнировъ a и n такъ, чтобы возстановить опять связь рѣшетокъ II и III въ точкѣ g .

Первая часть этого изслѣдованія дастъ для точки g лѣвой половины фермы перемѣщеніе $O_L g'$ (діаграмма L), а для точки g правой половины перемѣщеніе $O_R g'$ (діаграмма R). Вслѣдствіе втораго движенія рѣшетка II повернется около полюса (II. w), положеніе котораго опредѣляется по способу, описанному на стр. 72; поэтому лучъ $g''O_L$ долженъ быть перпендикуляренъ къ прямой, проходящей черезъ

*) Знакъ ∞ (4. II) указываетъ на то, что полюсъ (4. II) совпадаетъ съ безконечно удаленной точкой пересѣченія стержней 3 и 7.

**) При опредѣленіи полюсовъ часто приходится проводить линіи черезъ точки, лежащія внѣ предѣловъ чертежной доски; это не представляетъ особенныхъ затрудненій, но тѣмъ не менѣе настолько хлопотливо, что заставляетъ предпочесть другіе способы.

точки (II. w) и g . На діаграммѣ R $g''O$, перпендикулярна къ прямой g —(III. w). Такъ какъ обѣ діаграммы должны дать перемѣщенія $g''g'$, которыя одинаковы по величинѣ, направленію и теченію, то положеніе точки g'' можно опредѣлить слѣдующимъ способомъ.

Въ діаграммѣ (L) откладываемъ отрѣзокъ $g's$, равный и параллельный лучу $g'O$, діаграммы (R), и черезъ точку s проводимъ прямую, перпендикулярную къ прямой g —(III. w). Эта прямая пересѣчетъ данное направленіе луча $g''O$, въ точкѣ g'' . Затѣмъ отрѣзокъ O, g'' въ діаграммѣ (R) дѣлаемъ равнымъ отрѣзку sg'' въ діаграммѣ (L).

Теперь уже легко опредѣлить (какъ и въ задачѣ 1) пути $d''O$, $c''O$, . . . точекъ d , c , . . . , соответствующіе перемѣщенію $g''O$, а также перемѣщенія $h''O$, $i''O$, . . . точекъ h , i , . . .

3. Примѣръ. Построимъ діаграмму перемѣщеній для цѣпи, усиленной жесткой балкой со среднимъ шарниромъ, фиг. 56. Въ точкѣ b находится неподвижный шарниръ, въ точкѣ p —подвижной съ движеніемъ по горизонтальному направленію. Шарниры a и x главной цѣпи aox лежатъ на подвижныхъ телѣжкахъ; удерживающія цѣпи, получающія удлинненія Δ' и Δ'' , соединены съ неподвижными точками устоевъ.

Изъ произвольно взятаго полюса O (діаграмма A) откладываемъ отрѣзокъ Δ' , параллельный лѣвой удерживающей цѣпи; въ концѣ этого отрѣзка возстаемъ перпендикуляръ, который пересѣчетъ въ точкѣ a' горизонтальную прямую, проходящую черезъ O . Oa' представляетъ перемѣщеніе точки a . Отъ a' откладываемъ Δ_1 —удлинненіе участка цѣпи 1, а перпендикуляръ въ концѣ Δ_1 опредѣлитъ мѣсто точки c' .

Вначалѣ рекомендуется взять положеніе точки c' произвольно и предположить, что точка c движется яко бы по направленію луча Oc' ; въ то же время уничтожаемъ горизонтальное движеніе точки x . Принимая для точки c' опредѣленное положеніе, мы можемъ найти перемѣщенія всѣхъ узловъ рѣшетки; такимъ образомъ найдемъ по порядку:

точку d'	посредствомъ $\Delta(bd)$ и Δ_2 ,
" e'	" $\Delta(bc)$ и $\Delta(de)$
" f'	" $\Delta(df)$ и $\Delta(cf)$
" g'	" $\Delta(dg)$ и $\Delta(fg)$
" h'	" Δ_4 и Δ_3 и т. д.,

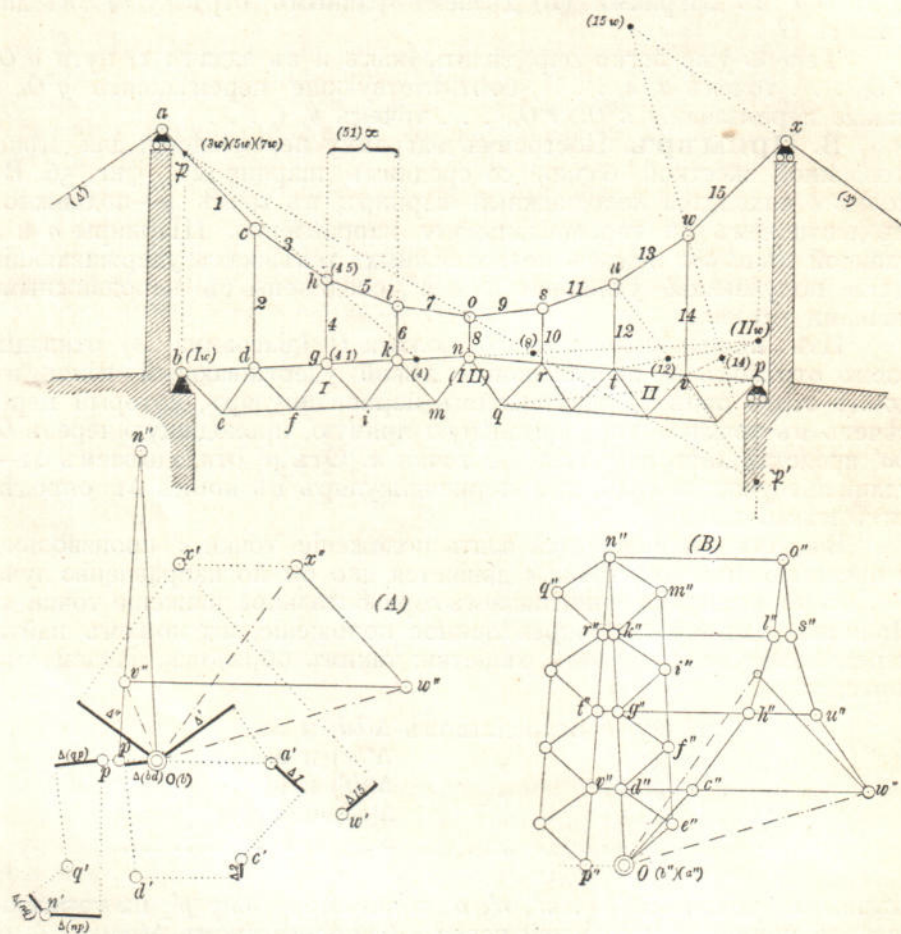
остальныя точки i' , k' , l' , m' , n' , o' , а затѣмъ точку p' , на горизонтальной прямой, проходящей черезъ O , посредствомъ $\Delta(np)$,

точку q'	посредствомъ $\Delta(nq)$ и $\Delta(pq)$ *),
" r'	" $\Delta(nr)$ и $\Delta(qr)$
" s'	" Δ_9 и Δ_{10} и т. д. до
точки w' .	

Наконецъ получимъ точку x' , отложивъ отъ O и w' отрѣзки Δ'' (параллельные правой удерживающей цѣпи) и отрѣзокъ Δ_{15} и возставивъ въ концахъ ихъ перпендикуляры.

*) $\Delta(pq)$ и $\Delta(np)$ берутся изъ отдѣльной діаграммы, построенной для рѣшетки II. На діаграммѣ (A) даны, ради отчетливости чертежа, только точки a' , c' , d' , e' , p' , q' , w' , x' .

Теперь опять устранимъ возможность точки двигаться по определенному пути и вслѣдствіе этого обратимъ рѣшетку въ кинематическую цѣпь, которой сообщимъ такое движеніе, чтобъ точка x получила перемѣщеніе $x''O$; причемъ это перемѣщеніе, будучи сложено съ Ox' , должно дать общее горизонтальное перемѣщеніе $x''x'$. Полюсы, вокругъ которыхъ вращаются отдѣльныя части рѣшетки, опредѣляются слѣдующимъ образомъ.



Фиг. 56.

Полюсъ (I. w) рѣшетки I относительно устоевъ совпадаетъ съ b , полюсъ (I. II) съ точкой n , полюсъ же (II. w) опредѣлится точкой пересѣченія прямой (I. w)—(I. II) съ вертикалью точки p , потому что p движется по горизонтальной линіи.

Стержни 5, 4, 6 образуютъ съ рѣшеткой I шарнирный четырехугольникъ, поэтому безконечно удаленная точка пересѣченія стержней 4 и 6 будетъ полюсомъ для стержня 5 относительно фигуры I; этотъ полюсъ лежитъ на вертикали точки b , потому что полюсы $(5. w)$, $(5. I)$, $(I. w)$ должны лежать на одной прямой. Такъ какъ на-

правление перемѣщенія точки c перпендикулярно къ оси стержня 1, вращающагося около a , и въ то же время c принадлежитъ стержню 3, то точка пересѣченія \mathfrak{F} стержня 1 съ вертикалью точки p будетъ полюсомъ для стержня 3 относительно w , и поэтому точка h будетъ перемѣщаться по перпендикуляру къ прямой $\mathfrak{F}h$. Но отсюда слѣдуетъ, что (5. w) совпадаетъ съ \mathfrak{F} , а также \mathfrak{F} совпадаетъ съ (7. w).

Точно такимъ же способомъ можно доказать, что точка пересѣченія \mathfrak{F}' прямой $\mathfrak{F}o$ съ вертикалью точки b будетъ общимъ полюсомъ для стержней 9, 11 и 13, потому что полюсы (9. w), (11. w), (13. w) лежатъ на прямой, которая проходитъ черезъ (II. w) и черезъ безконечно удаленныя точки пересѣченія стержней 8 и 10, 10 и 12, 12 и 14.

Проведемъ теперь черезъ \mathfrak{F} и верхній конецъ подвѣски лѣвой половины фермы прямую, затѣмъ проведемъ также прямую черезъ (I. w) и черезъ нижній конецъ подвѣски; въ точкѣ пересѣченія обѣихъ прямыхъ найдемъ полюсъ этой подвѣски. Подобнымъ же путемъ опредѣлимъ полюсъ (4. w) стержня 4 (на фиг. 56 этотъ полюсъ обозначенъ цифрой (4); доказательство основывается на томъ, что точки (5. w), (4. 5), (4. w) будутъ лежать на одной прямой, а также и точки (I. w), (4. I), (4. w) будутъ лежать на одной прямой. Такимъ же способомъ можно опредѣлить полюсы для подвѣсныхъ стержней правой половины. вмѣсто точекъ \mathfrak{F} и (I. w) тутъ будутъ точки \mathfrak{F}' и (II. w). На чертежѣ цифрами (12) и (14) обозначены полюсы (12. w) и (14. w) для стержней 12 и 14. Полюсъ (8) стержня 8 лежитъ въ точкѣ пересѣченія прямыхъ $\mathfrak{F}\mathfrak{F}'$ и (I. w) — (II. w). Полюсъ (15. w) находится на прямой \mathfrak{F}' (14) и на оси правой удерживающей цѣпи.

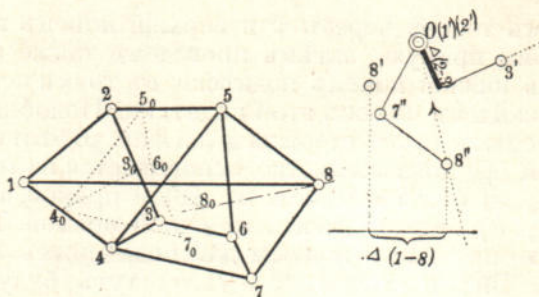
Для опредѣленія перемѣщеній точекъ цѣпи проводимъ въ діаграммѣ A лучъ $x''O$ перпендикулярно къ направленію правой удерживающей цѣпи до горизонтальной прямой, проходящей черезъ x' , затѣмъ проводимъ $x''w'' \perp xw$ и Ow'' перпендикулярно къ прямой, которая соединяетъ точку w съ полюсомъ \mathfrak{F}' . Точка v'' найдется съ помощью условий: $v''w'' \perp vw$ и $v''O \perp v$ (14), а точка n'' съ помощью: $v''n'' \perp vn$ и $n''O \perp$ (I. w); такимъ образомъ опредѣлены по двѣ точки фигуръ $n''p''q''$ и $n''m''a''$, подобныхъ частямъ фермы npr и mtb . При правильномъ построении точка p'' должна лежать на горизонтальной прямой, проходящей черезъ O .

Чтобъ не затемнять фиг. (A), переносимъ найденныя точки $x''w''v''n''p''$ на отдѣльную фигуру и здѣсь уже продолжаемъ опредѣленіе искомымъ перемѣщеній. Построивъ фигуры $n''p''q''$ и $n''m''a''$, опредѣлимъ по порядку:

u''	посредствомъ	$u''w'' \perp uw$	и	$u''t'' \perp ut$
s''	"	$s''u'' \perp su$	и	$s''r'' \perp sr$
o''	"	$o''s'' \perp os$	и	$o''n'' \perp on$
l''	"	$l''o'' \perp lo$	и	$l''k'' \perp lk$
h''	"	$h''l'' \perp hl$	и	$h''g'' \perp hg$
c''	"	$c''h'' \perp ch$	и	$c''d'' \perp cd$

При тщательномъ вычерчиваніи прямая, проведенная черезъ c'' перпендикулярно къ ca , должна пройти черезъ полюсъ O діаграммы перемѣщеній. Затѣмъ должно получиться: $u''O \perp u\mathfrak{F}'$, $s''O \perp s\mathfrak{F}'$, $o''O \perp o\mathfrak{F}'$, $l''O \perp l\mathfrak{F}'$, $h''O \perp h\mathfrak{F}'$.

4. Примѣръ. На фиг. 57 представлена рѣшетка, которая построена слѣдующимъ способомъ. Къ шарнирному четырехугольнику 1, 2, 3, 4 присоединены узлы 5, 6, 7, n , причемъ 5 связанъ съ 4 и 2, 6 съ 5 и 3, 7 съ 6 и 4, n съ $n-1$ и $n-3$, и затѣмъ прибавленъ еще стержень $n1$. На фиг. 57 $n=8$. При построении диаграммы перемѣщений считаемъ, что узелъ 1 и направление стержня 1—2 неподжны и что узелъ 3 будетъ двигаться по какой нибудь неподвижной прямой, а стержень 1—8 будетъ устранинъ. Отложимъ отъ полюса O диаграммы перемѣщений измѣненіе длины Δ (2—3) стержня 2—3 (на фиг. 57 это измѣненіе при-



Фиг. 57.

нято положительнымъ); въ концѣ этого отрезка возставимъ перпендикуляръ, который будетъ геометрическимъ мѣстомъ точки $3'$. Возьмемъ мѣсто этой точки произвольно; прямая, соединяющая эту точку съ O , даетъ направление, по которому будетъ, по нашему предположенію, двигаться узелъ 3.

Теперь опредѣлимъ по порядку точки $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $8'$; затѣмъ устранимъ подвижность узла по взятому направлению и сообщимъ системѣ стержней, которые считаются теперь жесткими, такое движеніе, для котораго удовлетворяется условіе, что взаимное перемѣщеніе точекъ 8 и 1 равно измѣненію длины Δ (1—8) стержня 1—8. Для этого опредѣлимъ съ помощью перемѣщений $3-3_0$, $4-4_0$, . . . $8-8_0$, повернутыхъ на 90° , направление луча $8''O$, перпендикулярнаго къ прямой $8-8_0$; а на этомъ лучѣ найдемъ точку $8''$ на основаніи того условія, что проекція общаго перемѣщенія $8''8'$ точки 8 на прямую, параллельную стержню (1—8), равно измѣненію длины Δ (1—8) этого стержня (на фиг. 57 оно принято отрицательнымъ). Теперь посредствомъ $7''-8'' \perp 7-8$ и $7''O \perp 7-7_0$ найдемъ $7''$, потомъ найдемъ $6''$, $5''$, Такимъ образомъ будутъ опредѣлены общія перемѣщенія $m''m'$ всѣхъ узловъ m .

Только что рассмотрѣнному сочлененію изъ стержней можетъ соответствовать сочлененіе изъ рѣшетчатыхъ фигуръ, образованное подобнымъ же путемъ. Части I, 4, 5 образуютъ съ неподвижными точками a и f земли шарнирный четырехугольникъ, къ которому присоединены: узелъ d посредствомъ частей II и 7, потомъ узелъ i посредствомъ 12 и 13 и затѣмъ узелъ l посредствомъ 15 и III; послѣдней части III дана возможность двигаться въ точкѣ m по опредѣленному пути.

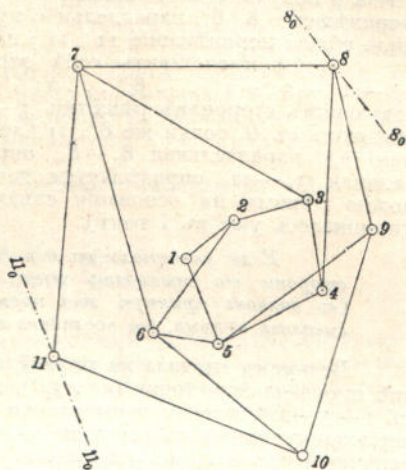
5. Примѣръ. Приведемъ еще одну очень поучительную задачу, которую возможно рѣшить двумя способами. Второе рѣшеніе доставляетъ наглядные результаты даже въ самыхъ трудныхъ случаяхъ.

1) Къ шарнирному пятиугольнику 1—2—3—4—5 присоединимъ дальнѣйшіе узлы 6, 7, 8, ..., m , ..., n , связывая каждый узелъ двумя новыми стержнями: 6 соединимъ съ 5 и 2, 7 съ 6 и 3, ..., m съ $(m-1)$ и $(m-4)$, ..., n съ $(n-1)$ и $(n-4)$.

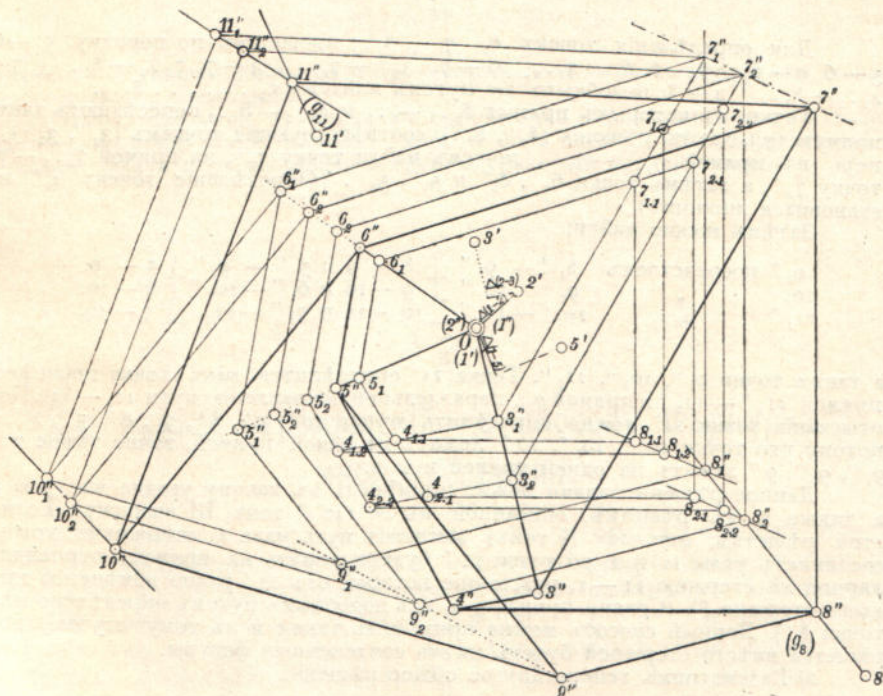
Пусть узелъ 1 и направленіе стержня 1—2 будутъ неподвижны; узелъ m пусть движется по прямой m_0m_0 , а узелъ n по прямой n_0n_0 . Построимъ диаграмму перемѣщеній.

На фиг. 58 а $m=8$ и $n=11$. Отъ полюса O (фиг. 58 б) отложимъ измѣненія длины $\Delta(1-2)$ и $\Delta(1-5)$ стержней 1—2 и 1—5 и къ отрѣзку $\Delta(1-2)$ присоединимъ отрѣзокъ $\Delta(2-3)$. Перпендикуляры, возставленные въ концахъ отрѣзковъ $\Delta(2-3)$ и $\Delta(1-5)$, будутъ геометрическими мѣстами точекъ 3' 5'.

Если положеніе точекъ 3' и 5' выбрать сначала произвольно, т. е. предположить, что узлы 3 и 5 (вмѣсто 8 и 11) будутъ имѣть возможность двигаться по неподвижнымъ прямымъ, параллельнымъ лучамъ $03'$ и $05'$, то можно будетъ опредѣлить по очереди точки 4', 6', 7', 8', 9', 10', 11', такъ какъ узелъ 4 соединенъ съ 3 и 5 двумя стержнями, узелъ 6 соединенъ съ 2 и 5 также двумя стержнями и т. д.



Фиг. 58 а.



Фиг. 58 б.

Теперь уничтожим направление движения точек 3 и 5 и повернем стержни 2—3 и 1—5 около остающихся в покоѣ шарниров 1 и 2, такъ чтобы точка 8 получила перемѣщеніе $8''$ O , которое будучи сложено съ $O8'$, дало бы перемѣщеніе $8''$ $8'$, параллельное пути 8_0 $8_0'$, точно также чтобы точка 11 получила общее перемѣщеніе $11''$ $11'$, параллельное 11_0 — $11_0'$.

Чтобы представить себѣ это движеніе, построимъ на фиг. 58 б фигуру $1''$ — $2''$ — $3''$ — $4''$... $8''$... $11''$, стороны которой перпендикулярны соответствующимъ сторонамъ рѣшетки 1 — 2 — 3 — 4 ... 8 ... 11 , а точки $1''$, $2''$ совпадаютъ съ O , точки же $8''$, $11''$ лежатъ на данныхъ прямыхъ (g_8) и (g_{11}). Прямая (g_8), параллельная 8_0 — $8_0'$, опредѣляется точкой $8''$, а прямая (g_{11}), параллельная 11_0 — $11_0'$, опредѣляется точкой $11''$. Эту чисто геометрическую задачу можно рѣшить на основаніи слѣдующаго закона геометріи положенія (о чемъ упоминалось уже въ I томѣ):

Если многоточникъ о n сторонахъ мѣняетъ свою форму такъ, что всѣ стороны его проходятъ черезъ неподвижныя точки одной и той же прямой (въ данномъ примѣрѣ эта прямая бесконечно удалена), а $n-1$ вершины описываютъ прямая, то послѣдняя вершина движется также по прямой.

Возьмемъ сначала на прямой $O3''$, перпендикулярной къ стержню 2—3 двѣ произвольныя точки ($3_1''$, $3_2''$), а также на прямой $O5''$, перпендикулярной къ 1—5, двѣ произвольныя точки (5_1 , 5_2); черезъ $3_1''$ и $3_2''$ проводимъ прямая, перпендикулярныя къ стержню 3—4, и на этихъ линіяхъ находимъ точки пересѣченія ихъ $4_1 \cdot 1$, $4_1 \cdot 2$, $4_2 \cdot 1$, $4_2 \cdot 2$ съ прямыми, проходящими черезъ 5_1 и 5_2 перпендикулярно къ 5—4. Тогда получимъ

$$[O, 3_1'', 4_1 \cdot 1, 5_1]; [O, 3_1'', 4_1 \cdot 2, 5_2]; [O, 3_2'', 4_2 \cdot 1, 5_1]; [O, 3_2'', 4_2 \cdot 2, 5_2]$$

четыре пробныхъ рѣшенія для искомаго четырехугольника $O, 3'', 4'', 5''$.

Первому рѣшенію соответствуютъ точки	6_1 , $7_1 \cdot 1$, $8_1 \cdot 1$,
второму	" " " 6_2 , $7_1 \cdot 2$, $8_1 \cdot 2$,
третьему	" " " 6_1 , $7_2 \cdot 1$, $8_2 \cdot 1$,
четвертому	" " " 6_2 , $7_2 \cdot 2$, $8_2 \cdot 2$.

Для опредѣленія точекъ 6_1 , $7_1 \cdot 1$, $8_1 \cdot 1$ проводимъ по порядку: 5_1 — $6_1 \perp$, 5 — 6 , 0 — $6_1 \perp$ 2—6, 6_1 — $7_1 \cdot 1 \perp$ 6—7, $3_1''$ — $7_1 \cdot 1 \perp$ 3—7, $7_1 \cdot 1$ — $8_1 \cdot 1 \perp$ 7—8, $4_1 \cdot 1$ — $8_1 \cdot 1 \perp$ 4—8; подобнымъ же путемъ найдемъ 6_2 ... 8_2 .

Точки, въ которыхъ прямая $8_1 \cdot 1$ — $8_2 \cdot 1$ и $8_2 \cdot 1$ — $8_2 \cdot 2$ пересѣкаютъ данную прямую (g_8), даютъ рѣшенія ($8_1''$, $8_2''$), соответствующія точкамъ ($3_1''$, $3_2''$); теперь на прямой $7_1 \cdot 1$ — $7_1 \cdot 2$ можемъ найти точку $7_1''$, на прямой $7_2 \cdot 1$ — $7_2 \cdot 2$ точку $7_2''$, а затѣмъ точки $6_1''$, $6_2''$ и $5_1''$, $5_2''$. (Опредѣленіе точекъ $4_1''$ и $4_2''$ становится лишнимъ).

Затѣмъ можно найти;

$9_1''$ посредствомъ	$8_1''$ — $9_1'' \perp$ 8—9 и $5_1''$ — $9_1'' \perp$ 5—9,
$10_1''$ " "	$9_1''$ — $10_1'' \perp$ 9—10 и $6_1''$ — $10_1'' \perp$ 6—10,
$11_1''$ " "	$10_1''$ — $11_1'' \perp$ 10—11 и $7_1''$ — $11_1'' \perp$ 7—10,

а также точки $9_2''$, $10_2''$, $11_2''$. Точка $11''$ опредѣлится какъ точка пересѣченія прямой $11_1''$ — $11_2''$ и прямой g_{11} , параллельной направленію пути 11_0 — $11_0'$. Послѣ отысканія точки $11''$ можно опредѣлить точки $10''$, $9''$, $8''$, $7''$, $6''$, $5''$, $4''$, $3''$. потому что точки $10_1''$, $10_2''$, $10''$ лежатъ на одной прямой, точно также точки $9_1''$, $9_2''$, $9''$ лежатъ на одной прямой и т. д.

Данное рѣшеніе задачи можно примѣнить къ какому угодно числу m и n , а также и къ рѣшеткѣ, описанной въ № 142 (I томѣ, III выпускъ). Если въ этой рѣшеткѣ, фиг. 201 (I томѣ) замѣнить путь узла 11 стержнемъ, который соединяетъ узлы 11 и 1, то точка $11''$ будетъ лежать на прямой, перпендикулярной къ стержню 11—1, разстояніе которой отъ 11' равно измѣненію длины этого стержня *). (Сравни примѣръ 4, гдѣ подобнымъ путемъ опредѣлено мѣсто точки $8''$). Данный способъ можно примѣнить также и къ тому случаю, когда рѣшетка вмѣсто стержней будетъ имѣть сочлененныя фигуры.

2) Разсмотримъ теперь другое общее рѣшеніе.

* Частный случай на фиг. 201 (I томѣ, III выпускъ) ($m=8$, $n=11$, m соединено съ 2 и n съ 11) можно разобратъ проще, если принять стержень 2—неподвижнымъ. Тогда получится рѣшетка такого же рода, какъ въ примѣрѣ 4.

Устраним какъ и раньше, опоры точекъ 8 и 11 (фиг. 58 а), а вмѣсто этого соединимъ каждый изъ узловъ 3 и 5 стержнями съ неподвижными точками, лежащими внѣ рѣшетки. Пусть эти стержни (называемые *воображаемыми* въ отличіе отъ дѣйствительныхъ стержней рѣшетки) получать произвольныя измѣненія длины Δx и Δy . Перемѣщенія всѣхъ узловъ такой рѣшетки можно опредѣлить, примѣняя рѣшеніе основной задачи (№ 32). Точка 8 будетъ вообще удалаться отъ направляющей 8_0-8_0 ; проекція этого перемѣщенія на прямую, перпендикулярную къ 8_0-8_0 , имѣетъ конечную величину δ_8 ; точно также получается конечная величина δ_{11} для проекціи перемѣщенія узла 11 на прямую, перпендикулярную къ 11_0-11_0 .

Между δ_8 , δ_{11} и измѣненіями длины стержней имѣется (по № 4) зависимость первой степени, а именно:

$$I. \quad \begin{cases} \delta_8 = \alpha_8 \Delta x + \beta_8 \Delta y + \delta_8', \\ \delta_{11} = \alpha_{11} \Delta x + \beta_{11} \Delta y + \delta_{11}', \end{cases}$$

гдѣ δ_8' и δ_{11}' — количества, зависящія отъ измѣненій длины дѣйствительныхъ стержней, представляютъ тѣ значенія δ_8 и δ_{11} , когда оба воображаемыхъ стержня будутъ предположены жесткими (состояніе: $\Delta x = 0$ и $\Delta y = 0$). Если уничтожить также измѣненія длины дѣйствительныхъ стержней (что можно обозначить просто черезъ $\Delta s = 0$), то получимъ $\delta_8' = 0$, $\delta_{11}' = 0$.

Затѣмъ слѣдующіе коэффициенты обозначаютъ:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_8, \alpha_{11} & \text{величины } \delta_8, \delta_{11} & \text{для состоянія: } \Delta x = 1, \Delta y = 0, \Delta s = 0; \\ \beta_8, \beta_{11} & \text{,, } \delta_8, \delta_{11} \text{ ,, } & \Delta x = 0, \Delta y = 1, \Delta s = 0; \end{array}$$

шесть коэффициентовъ правыхъ половинъ уравненій I можно опредѣлить посредствомъ трехъ диаграммъ перемѣщеній, которыя соответствуютъ тремъ принятымъ состояніямъ; наконецъ, условія $\delta_8 = 0$ и $\delta_{11} = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_8 \Delta x + \beta_8 \Delta y + \delta_8' &= 0 \\ \alpha_{11} \Delta x + \beta_{11} \Delta y + \delta_{11}' &= 0, \end{aligned}$$

дадутъ тѣ измѣненія длины Δx и Δy , которыя должны быть приписаны обоимъ воображаемымъ стержнямъ.

Отсюда слѣдуетъ, что подобное опредѣленіе перемѣщеній узловъ каждой статически опредѣлимой рѣшетки можетъ быть сведено къ рѣшенію первой основной задачи и къ разрѣшенію группы уравненій первой степени.

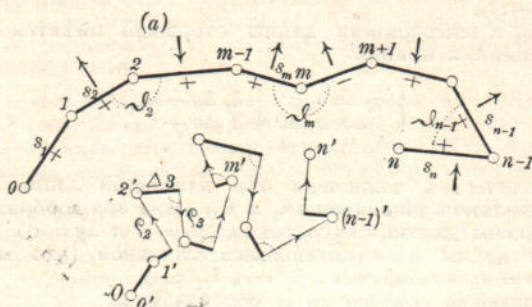
§ 2.

Диаграммы перемѣщеній по способу шарнирнаго многоугольника.

39. Возьмемъ рядъ стержней, изъ которыхъ каждый соединенъ съ предыдущимъ и послѣдующимъ шарнирами. Получится фигура, которую назовемъ *шарнирнымъ многоугольникомъ*. Обозначимъ узлы цифрами 0, 1, 2, (m-1), m, (m+1), n, длину стержней буквами $s_1, s_2, \dots s_m, \dots s_n$ и углы, образуемые осями двухъ сосѣднихъ стержней черезъ $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_m, \dots \vartheta_{n-1}$, фиг. 59.

Если внѣшнія силы будутъ приложены къ узловымъ точкамъ и если въ шарнирахъ не обнаруживается тренія, — и то, и другое можно предположить, — то каждый стержень получитъ либо растягивающія, либо сжимающія усилія; ось каждого стержня оста-

нется прямою, взаимныя же перемѣщенія узловъ можно опредѣлить съ помощью измѣненій длины стержней $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots$ и измѣненій угловъ $\Delta \theta_1, \Delta \theta_2, \dots$. Наглядное изображеніе этихъ перемѣщеній имѣетъ большое значеніе въ теоріи рѣшетки съ узлами, соединенными шарнирнымъ многоугольникомъ, измѣненія угловъ котораго легко рассчитать.

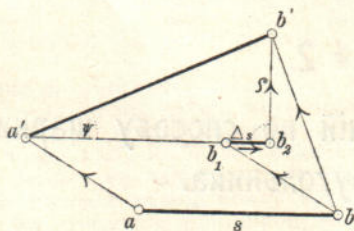


Фиг. 59.

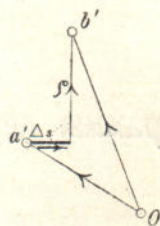
Примемъ сначала, что всѣ Δs и $\Delta \theta$ извѣстны; предположимъ также, что направленіе оси какого нибудь стержня и одна точка этой оси неподвижны, напр., направленіе стержня s_1 и узелъ O . Остальные стержни ($s_2, s_3, \dots, s_m, \dots, s_n$) повернутся на опредѣленные углы $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_m, \dots, \psi_n$, причемъ:

$$\psi_2 = \Delta \theta_1; \quad \psi_3 = \psi_2 + \Delta \theta_2; \quad \dots; \quad \psi_m = \psi_{m-1} + \Delta \theta_{m-1} \dots$$

Разсмотримъ произвольный стержень s , концы котораго обозначены буквами a и b , фиг. 60. Пусть путь aa' точки a заданъ. Для опредѣленія новаго положенія b' точки b перемѣстимъ стержень ab



Фиг. 60 а.



фиг. 60 б.

параллельно самому себѣ въ положеніе $a'b_1$, измѣнимъ его длину на заданную величину $b_1b_2 = \Delta s$ и затѣмъ повернемъ его на данный уголъ ψ . Точка b_2 опишетъ при этомъ дугу круга

$$\overline{b_2b'} = (s + \Delta s) \psi,$$

которая, при нашихъ изслѣдованіяхъ весьма малыхъ перемѣщеній, можетъ быть замѣнена перпендикуляромъ къ $a'b_2$ въ точкѣ b_2 , длина котораго

$$\rho = s'\psi.$$

Перемѣщенія узловъ надо вычертить въ соотвѣтствующемъ увеличеніи на отдѣльной фигурѣ (какъ и въ § 1), откладывая ихъ отъ произвольно выбраннаго полюса O ; каждое перемѣщеніе узла будетъ представлено на діаграммѣ по величинѣ, направленію и теченію лучемъ, исходящимъ изъ полюса O . На фиг. 60 в лучъ Oa' дасть перемѣщеніе точки a ; отъ точки a' откладываютъ отрѣзокъ Δs , параллельный s , въ концѣ котораго возставляютъ перпендикуляръ къ s длиной ρ ; лучъ Ob' дасть искомое перемѣщеніе точки b .

Такимъ путемъ на фиг. 59 в построены послѣдовательно перемѣщенія узловъ шарнирнаго многоугольника, представленнаго на фиг. 59 а. Значенія Δs и $\rho = s'\psi$ отложены по величинѣ, направленію и теченію въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \rho_2, \Delta s_3, \rho_3, \dots, \Delta s_m, \rho_m, \dots, \Delta s_n, \rho_n,$$

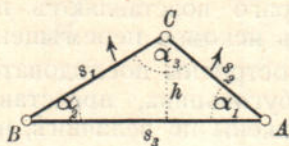
причемъ $\Delta s_m \parallel s_m$, $\rho_m \perp s_m$. вмѣсто обозначеній $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots$ введены болѣе краткія $\Delta 1, \Delta 2, \dots$. Лучи $O1', O2', O3'$ (на фиг. не проведены) представляютъ по величинѣ, направленію и теченію искомаго перемѣщенія узловъ 1, 2, 3, \dots . На фиг. 59 а маленькія стрѣлки показываютъ направленія вращенія отдѣльныхъ стержней. Положительному значенію ψ соотвѣтствуетъ въ данномъ случаѣ вращеніе влѣво, отрицательному—вращеніе вправо. Знаки $(+)$ и $(-)$, стоящіе у стержней указываютъ на знакъ передъ количествомъ Δs . Стержни со знакомъ $(+)$ растянуты, остальные сжаты.

Если шарнирный многоугольникъ имѣетъ другаго рода опоры чѣмъ въ предыдущемъ примѣрѣ, то опять принимаемъ направленіе какого нибудь стержня и одну точку его неподвижными, строимъ діаграмму перемѣшеній по только что описанному способу, затѣмъ сообщаемъ всему шарнирному многоугольнику, разсматриваемому теперь какъ цѣлое жесткое тѣло, такое движеніе, которое отвѣчало бы дѣйствительнымъ условіямъ закрѣпленія опоръ. Перемѣщенія, которыя получаютъ узловыя точки вслѣдствіе этого втораго движенія, изобразятся (также какъ и въ § 1 — № 34) лучами $m''O$, которые направлены къ полюсу и которые, будучи сложены съ лучами Om' дадутъ общее перемѣщеніе $m''m'$ (фиг. 36, стр. 62).

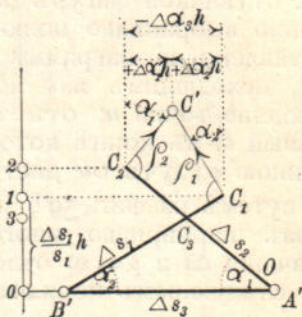
Результаты этихъ изслѣдованій мы будемъ примѣнять къ такимъ рѣшеткамъ, которыя состоятъ изъ треугольной сѣтки. Углы θ между двумя смежными боками шарнирнаго многоугольника, соединяющаго узлы подобной рѣшетки, будутъ углами треугольниковъ или же могутъ быть составлены изъ такихъ угловъ. Вычисленіе измѣненій угловъ $\Delta\theta$ основывается на рѣшеніи слѣдующей важной задачи.

40. Вторая основная задача. Даны измѣненія длины $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ сторонъ s_1, s_2, s_3 треугольника ABC ; требуется найти измѣненія $\Delta \alpha_1, \Delta \alpha_2, \Delta \alpha_3$ угловъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, фиг. 61 а.

Простое рѣшеніе вопроса получается при помощи діаграммы перемѣщений Вилліо. Примемъ точку A и направленіе стороны AB неподвижными. Тогда A' совпадетъ съ полюсомъ O (фиг. 61 b), а $A'B' = \Delta s_3$ опредѣлитъ перемѣщеніе точки B . Отъ A' и B' отложимъ отрѣзки Δs_2 и Δs_1 и въ концахъ ихъ возставимъ перпендикуляры, точка пересѣченія которыхъ C' дастъ перемѣщеніе OC' точки C .



Фиг. 61 a.



Фиг. 61 b.

Если вообразить, что точка C' найдена по способу, приведенному въ № 39, при помощи величинъ Δs_2 и $\rho_2 = s_2 \psi_2$, соответствующихъ стержню s_2 , то нетрудно заключить, что перпендикуляръ $\overline{C'C_2}$, опущенный изъ C' на Δs_2 , равенъ ρ_2 . Но такъ какъ стержень s_3 неподвиженъ, то стержень s_2 повернется на уголъ $\Delta \alpha_1$; поэтому получимъ:

$$\overline{C'C_2} = \rho_2 = s_2 \Delta \alpha_1;$$

точно также найдемъ (перенеся полюсъ изъ A' въ B' , т. е. принявъ точку B неподвижной):

$$\overline{C'C_1} = \rho_1 = s_2 \Delta \alpha_2.$$

Обозначимъ точку пересѣченія Δs_1 и Δs_2 черезъ C_3 ; въ произвольной точкѣ O прямой $A'B'$ возставимъ къ ней перпендикуляръ, проведемъ черезъ точки C_1, C_2, C_3 линіи, параллельныя $A'B'$, которыя пересѣкаютъ этотъ перпендикуляръ въ точкахъ 1, 2, 3; тогда получимъ:

$$\overline{O1} : \Delta s_1 = h : s_1; \quad \overline{O1} = \Delta s_1 \frac{h}{s_1}; \quad \overline{O2} = \frac{\Delta s_2}{s_2} h; \quad \overline{O3} = \frac{\Delta s_3}{s_3} h,$$

гдѣ h — высота треугольника ABC при основаніи AB .

Спроектируемъ затѣмъ отрѣзки $\overline{C_2C'}$ и $\overline{C_1C'}$ на прямую, параллельную $A'B'$, и найдемъ для этихъ проекцій слѣдующія значенія: $\overline{C_2C'} \sin \alpha_1 = \rho_2 \sin \alpha_1 = s_2 \Delta \alpha_1 \sin \alpha_1 = \Delta \alpha_1 h$ и $\overline{C_1C'} \sin \alpha_2 = \Delta \alpha_2 h$, алге-

браическая сумма которых $= -\Delta\alpha_3 h$, потому что сумма угловъ треугольника и послѣ деформации равняется 180° , а

$$\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3 = 0.$$

Замѣняя на фиг. 61 b измѣненія длины Δs_1 , Δs_2 , Δs_3 отношеніями $\frac{\Delta s_1}{h}$, $\frac{\Delta s_2}{h}$, $\frac{\Delta s_3}{h}$ (которые можно представить въ численномъ масштабѣ отрезками), можемъ получить изъ этой фигуры значенія $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$.

Впрочемъ, для этой цѣли достаточно будетъ построить четырехугольникъ $C_1 C_3 C_2 C'$, опредѣляемый точками 1, 3, 2. Точка 3 выбирается произвольно; точки 1 и 2 находятся отъ 3 на разстояніяхъ:

$$\overline{31} = \frac{\Delta s_1}{s_1} - \frac{\Delta s_3}{s_3}; \quad \overline{21} = \frac{\Delta s_2}{s_2} - \frac{\Delta s_1}{s_1},$$

Чтобъ избѣгнуть ошибокъ при опредѣленіи знака $\Delta\alpha$, надо снабдить отрезки $\overline{C_2 C'}$ и $\overline{C_1 C'}$ стрѣлками, направленными къ точкѣ C' . Эти стрѣлки укажутъ, въ какомъ наравленіи относительно стороны s_3 поворачиваются стороны s_2 и s_1 . Въ данномъ примѣрѣ s_2 поворачивается вправо, s_1 — влево; слѣдовательно $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_2$ положительны, а для $\Delta\alpha_3$ получается отрицательное значеніе.

Изъ фиг. 61 b, гдѣ предполагаемъ, что всѣ линейныя измѣренія раздѣлены уже на h , можемъ вывести слѣдующую простую формулу.

Мы имѣемъ:

$$-\Delta\alpha_3 = \overline{C_2 C_3} \cos \alpha_1 + \overline{C_3 C_1} \cos \alpha_2$$

$$\overline{C_2 C_3} = \left(\frac{\Delta s_2}{s_2} - \frac{\Delta s_3}{s_3} \right) \frac{1}{\sin \alpha_1}; \quad \overline{C_3 C_1} = \left(\frac{\Delta s_1}{s_1} - \frac{\Delta s_3}{s_3} \right) \frac{1}{\sin \alpha_2},$$

отсюда получимъ:

$$(I) \quad \Delta\alpha_3 = \left(\frac{\Delta s_2}{s_2} - \frac{\Delta s_3}{s_3} \right) \cotg \alpha_2 + \left(\frac{\Delta s_1}{s_1} - \frac{\Delta s_2}{s_2} \right) \cotg \alpha_1.$$

Если данныя измѣненія длины являются слѣдствіемъ только внутреннихъ силъ S_1 , S_2 , S_3 , которые вызываютъ напряженія

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{F_1}; \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{F_2}; \quad \sigma_3 = \frac{S_3}{F_3},$$

то получимъ:

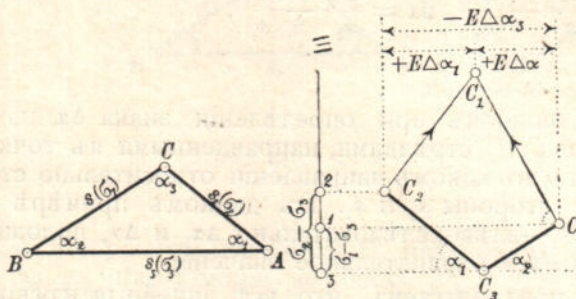
$$\frac{\Delta s_1}{s_1} = \frac{\sigma_1}{E_1}; \quad \frac{\Delta s_2}{s_2} = \frac{\sigma_2}{E_2}; \quad \frac{\Delta s_3}{s_3} = \frac{\sigma_3}{E_3}.$$

При одномъ и томъ же коэффициентѣ упругости (E) получимъ:

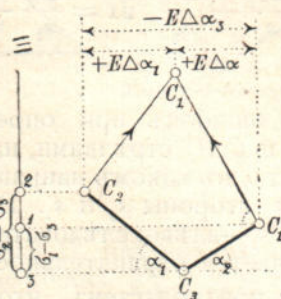
$$(2) \quad \begin{cases} E\Delta\alpha_3 = (\sigma_3 - \sigma_1) \cotg \alpha_2 + (\sigma_3 - \sigma_2) \cotg \alpha_1 \\ E\Delta\alpha_2 = (\sigma_2 - \sigma_3) \cotg \alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \cotg \alpha_3 \\ E\Delta\alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) \cotg \alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cotg \alpha_2. \end{cases}$$

Въ данномъ примѣрѣ удобнѣе будетъ опредѣлить количества $E\Delta\alpha$ (вмѣсто $\Delta\alpha$) чертежемъ, т. е. замѣнить количества $\frac{\Delta s}{s} h$ на фиг.

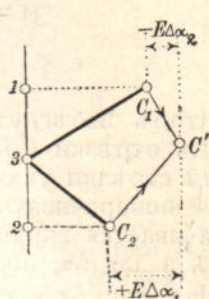
61 b соответствующими величинами σ . Такимъ образомъ приемъ, который вытекаетъ изъ фиг. 62, не требуетъ особыхъ поясненій. Надо обращать вниманіе на знакъ разности напряженій $\sigma_1 - \sigma_3$ и $\sigma_2 - \sigma_3$. На фиг. 62 b обѣ величины приняты положительными, на фиг. 62 c



Фиг. 62 а.



Фиг. 62 б.



Фиг. 62 с.

первая разность положительная, вторая отрицательная; кромѣ того на послѣдней фигурѣ точка C_3 совпадаетъ съ 3. Относительно знака измѣненій угловъ фиг. 62 b согласуется съ фиг. 61 b. На фиг. 62 c— s_1 и s_2 получаютъ вращеніе вправо; слѣдовательно, $\Delta\alpha_1$ —отрицательно, а $\Delta\alpha_2$ —положительно.

Для нахождения величинъ $E\Delta\alpha$ вычисленіемъ вводятъ слѣдующія вспомога-тельные величины:

$$\omega_1 = \cotg \alpha_1 (\sigma_2 - \sigma_3); \quad \omega_2 = \cotg \alpha_2 (\sigma_3 - \sigma_1); \quad \omega_3 = \cotg \alpha_3 (\sigma_1 - \sigma_2).$$

Такимъ образомъ получимъ:

$$E\Delta\alpha_1 = \omega_3 - \omega_2; \quad E\Delta\alpha_2 = \omega_1 - \omega_3; \quad E\Delta\alpha_3 = \omega_2 - \omega_1.$$



Фиг. 63.

Для большей наглядности надписываемъ величины напряженій у соответствующихъ сторонъ треугольника, а въ каждомъ углу величину его котангенса, см. фиг. 63. Для этого треугольника (соответствующаго треугольнику 11—12—13 рыбовидной фермы, листъ чертежей 2), стороны котораго имѣютъ напряженія:

$$-141, +463, -17 \text{ клгр. на кв. см.},$$

получаемъ:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0,496 (+463 + 17) = +238; \\ \omega_2 &= 1,079 (-17 + 141) = +134; \\ \omega_3 &= 0,295 (-141 + 463) = -178; \\ E\Delta\alpha_1 &= -178 - 134 = -312 \text{ клгр./см.}^2; \quad E\Delta\alpha_2 = +238 + 178 = +416; \\ E\Delta\alpha_3 &= 134 - 238 = -104. \end{aligned}$$

Величины ω можно опредѣлить также графически, для чего слѣдуетъ вычертить рѣшетчатую сѣть въ возможно большемъ масштабѣ.

Примѣненіе этого способа наглядно показано на фиг. 64 (листъ черт. 2, гдѣ изображены два треугольника рыбовидной фермы, представленной на этомъ же чертежѣ). Красныя числа, стоящія у стержней, означаютъ напряженія въ клгр. на кв. см. Разности напряженій въ стержняхъ, образующихъ углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, для треугольника I равны:

$$+ 463 + 17 = + 480; \quad - 17 + 141 = + 124; \quad - 141 - 463 = - 604$$

и для треугольника II:

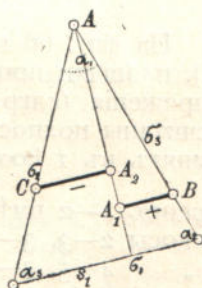
$$- 128 + 141 = + 13; \quad - 141 + 576 = + 435; \quad - 576 + 128 = - 448.$$

Эти величины умножимъ соотвѣтственно на $\cotg \alpha_1, \cotg \alpha_2, \cotg \alpha_3$, тогда получимъ:

$$\text{для треугольника I: } \omega_1 = + 238; \quad \omega_2 = + 134; \quad \omega_3 = - 178 \\ \text{и для треугольника II: } \omega_1 = + 13; \quad \omega_2 = + 177; \quad \omega_3 = - 183.$$

Отрѣзки, дающіе эти значенія ω , обозначены на фиг. 64 двойными линиями. Для масштаба напряженій выбрано: 4 мм. = 100 клгр./см.²; только для ω_1 въ треугольникѣ II выбранъ другой масштаб 1 мм. = 10 клгр./см.².

Если для каждаго треугольника требуется опредѣлить измѣненіе $\Delta\alpha$ только одного угла [напр. когда вмѣсто рѣшетки изслѣдуется шарнирный многоугольникъ, вычерченный на фиг. 77 (стр. 90) толстыми линиями], то можно воспользоваться слѣдующимъ нагляднымъ приемомъ. Изъ вершины A (фиг. 65) разсматриваемого угла α_1 опускаемъ на противоположащую сторону перпендикуляръ и откладываемъ на немъ абсолютныя значенія разностей напряженій:



Фиг. 65.

$$\overline{AA_1} = \sigma_1 - \sigma_3 \text{ и } \overline{AA_2} = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Проводя затѣмъ $A_1B \parallel s_1$ и $A_2C \parallel s_1$, получимъ

$$\overline{A_1B} = (\sigma_1 - \sigma_3) \cotg \alpha_2 \text{ и } \overline{A_2C} = (\sigma_1 - \sigma_2) \cotg \alpha_3.$$

Знаки надписываются у соотвѣтствующихъ отрѣзковъ. На фиг. 65 предположено $\sigma_1 > \sigma_3$ и $\sigma_2 > \sigma_1$. Затѣмъ получаемъ:

$$E\Delta\alpha_1 = \overline{A_1B} - \overline{A_2C}.$$

Чтобъ принять во вниманіе *измѣненія температуры*, надо только- (по стр. 10) увеличить напряженія $\sigma = \frac{S}{F}$ на величину εEt . Если, напр.,

для желѣзнаго стержня $S = + 20\,000$ клгр., $F = 50$ см.² и $\frac{S}{F} = 400$, а увеличеніе температуры составляетъ 30° C, то при опредѣленіи $E\Delta\alpha$ по вышеизложенному способу, надо положить $\sigma = 400 + \varepsilon Et = 400 + 22.30 = 1060$ клгр./см.², гдѣ $\varepsilon = 0,000\,012$ и $E = 1\,800\,000$. При охлажденіи на 30° — $\sigma = 400 - 22.30 = - 260$.

41. Изслѣдованіе деформаций рѣшетчатой балки.

Численный примѣръ. (Листъ чертежей 2). Требуется найти перемѣщенія узловъ нижняго пояса главной фермы желѣзнодорожнаго моста въ два пути для пробной нагрузки, показанной на фиг.

66 (листъ черт. 2) *). Напряженія, вызванныя этой нагрузкой, опредѣлены на фиг. 67 слѣдующимъ образомъ.

На фиг. 66 построенъ веревочный многоугольникъ при произвольномъ полюсномъ разстоянн H для данной нагрузки; въ этотъ веревочный многоугольникъ вписанъ многоугольникъ I II III . . . X, вершины котораго лежатъ на вертикаляхъ, соответствующихъ поперечнымъ фермамъ 0, 2, 4, 18, 20. Затѣмъ на фиг. 67 при помощи пучка лучей, параллельныхъ сторонамъ многоугольника, отсѣчемъ на вертикали, отстоящей на разстоянн H отъ полюса O , величины узловыхъ грузовъ $P_2, P_4, P_6, \dots P_{18}$; проведя лучъ s , параллельный замыкающей сторонѣ веревочнаго многоугольника, получимъ сопротивленія опоръ A и B въ точкахъ 0 и 20. Наконецъ, построимъ диаграмму Кремона, причемъ обозначимъ:

O_1, O_3, O_5, \dots усилія въ верхнемъ поясѣ,
 U_1, U_3, U_5, \dots " въ нижнемъ поясѣ,
 D_2, D_3, D_4, \dots " въ раскосахъ.

На фиг. 68 и 69 наглядно сопоставлены длина стержней (въ см.), площади поперечныхъ сѣченій (въ см.²), усилія (въ тоннахъ) и напряженія (клгр. на кв. см.). Поперечныя сѣченія на фиг. 70—75 сосчитаны полностью (brutto); коэффициентъ упругости для желѣза принять въ 1 800 000 клгр./см.²

Раскосъ 1—2 имѣетъ сѣченіе (фиг. 72) $F = 52$ см.
 Раскосы 2—3, 3—4 имѣютъ сѣченіе (фиг. 73) $F = 60$ см.
 " 4—5, 5—6, 6—7, 7—8 имѣютъ сѣченіе (фиг. 74) $F = 68$ см.
 " 8—9, 9—10 имѣютъ сѣченіе (фиг. 75) $F = 90$ см.

На фиг. 76 представлена диаграмма перемѣщеній узловъ нижняго пояса, образующаго шарнирный многоугольникъ. Величины $E\Delta\alpha$ для угловъ α треугольниковъ, соответствующихъ этому поясу, опредѣлены по № 40 и вписаны въ соответствующихъ же углахъ; эти величины опредѣляютъ измѣненія $\Delta\theta$ угловъ θ шарнирнаго многоугольника. Предположимъ сначала, что узелъ 9 и направленіе стержня 7—9 неподвижны, шарнирный же многоугольникъ свободенъ.

Тогда получимъ:

для стержня 7—5 значеніе $E\psi_{7-5} = E\Delta\theta_7 = +212 + 363 + 294 =$
 $= +869$ клгр./см.²,
 " " 5—3 " $E\psi_{5-3} = +869 + (301 + 432 + 426) =$
 $= +2028$,
 " " 3—1 " $E\psi_{3-1} = 2028 + (447 + 541 + 412) =$
 $= +3428$
 " " 1—0 " $E\psi_{1-0} = 3428 + (2170 + 926) =$
 $= +6524$.

Такимъ же путемъ для стержней правѣ 9 получимъ значенія:

$E\psi = 850; 1754; 2433; 3421; 4943; 8389$.

*) При пробныхъ нагрузкахъ всегда требуется опредѣленіе прогибовъ отъ одной временной нагрузки.

Всѣ стержни, лежащіе лѣвѣ неподвижнаго стержня 7—9, вращаются направо, а лежащіе справа—вращаются нѣтъво.

Для стержня 0—1 получимъ:

$$\rho_{0-1} = s \cdot \psi = \frac{s \cdot E\psi}{E} = 217 \text{ см.} \cdot \frac{6524}{1\,800\,000} = 0,982 \text{ см.} = 9,82 \text{ мм.};$$

для слѣдующаго стержня: $\rho = 6,21 \text{ мм.}$ и т. д.

Эти значенія вписаны на фиг. 66 въ скобкахъ; точно также вычислены измѣненія длины $\Delta s = \frac{Ss}{EF} = \frac{\tau s}{E}$. Напр., для стержня 0—1

$$\text{получается: } \Delta s_{0-1} = \frac{478 \cdot 271}{1\,800\,000} = 0,072 \text{ см.} = 0,72 \text{ мм.}$$

Когда эти вычисленія сдѣланы, можно построить діаграмму перемѣщений. Отъ отрѣзка $7'-9' = \Delta s_{7-9} = 0,94 \text{ мм.}$ (масштабъ 2:1) отложимъ влѣво послѣдовательно отрѣзки:

$$\Delta s_{7-5} = 0,98 \text{ мм.}, \rho_{7-5} = 1,77 \text{ мм.}, \Delta s_{5-3} = 1,00 \text{ мм.}, \rho_{5-3} = 4,25 \text{ мм.} \text{ и т. д.},$$

и вправо отрѣзки:

$$\Delta s_{9-11} = 0,95 \text{ мм.}, \rho_{9-11} = 1,70 \text{ мм.}, \Delta s_{11-13} = 0,93 \text{ мм.}, \rho_{11-13} = 3,53 \text{ мм.} \text{ и т. д.}$$

Конечныя точки отрѣзковъ ρ_{7-5} , ρ_{5-3} , . . . опредѣляютъ точки $5'$, $3'$, . . . , а конечныя точки отрѣзковъ ρ_{9-11} , ρ_{11-13} , . . . опредѣляютъ точки $11'$, $13'$, . . .

Наконецъ, надо принять во вниманіе дѣйствительныя перемѣщенія опорныхъ точекъ и построить фигуру $0''-1''-3''-5'' \dots 19''-20''$, подобную шарнирному многоугольнику $0-1-3-5 \dots 19-20$. Точка $0''$ совпадаетъ съ $0'$, потому что узелъ 0 неподвиженъ, а точка $20''$ должна лежать на горизонтали, проходящей черезъ $20'$, такъ какъ узелъ 20 движется по горизонтальному пути; $0''-20''$ перпендикулярно къ $0-20^*$).

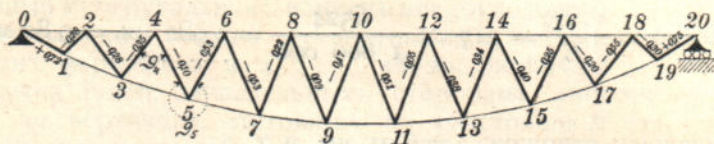
Такимъ образомъ перемѣщенія $1''1'$, $3''3'$, . . . узловъ 1, 3, . . . опредѣлены по величинѣ, направленію и теченію.

На фиг. 76 построена еще линія прогиба нижняго пояса. Вершины ея 0_0 , 1_0 , 3_0 , . . . лежатъ подъ соотвѣтствующими узлами 0 , 1 , 3 , . . . и на горизонтальныхъ линіяхъ, проходящихъ черезъ точки $0'$, $1'$, $3'$, . . . : наибольшее вертикальное перемѣщеніе (28,8 мм.) получаетъ узелъ 9. Когда требуется построить линію прогиба, то фигуру $0''-1''-2'' \dots 20''$ можно не чертить.

^{*}) Повѣрка: перемѣщеніе $20''-20'$ должно въ данномъ примѣрѣ равняться суммѣ измѣненій длины Δs стержней верхняго пояса. Такъ какъ эти стержни имѣютъ равную длину и одинаковое сѣченіе, то находимъ:

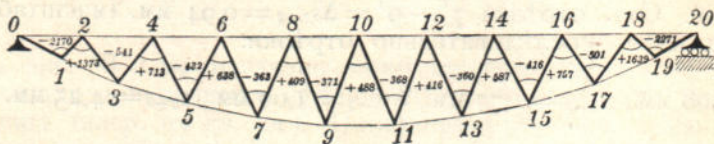
$$\overline{20''-20'} = \frac{s}{EF} \Sigma S = \frac{360 \cdot 1\,592\,000^*}{1\,800\,000 \cdot 278} = 1,15 \text{ см.} = 11,5 \text{ мм.}$$

Когда требуется имѣть перемѣщенія всѣхъ узловъ, то придется изслѣдовать шарнирный многоугольникъ $0-1-2-3 \dots 18-19-20$ (вычерченный на фиг. 77 жирными линиями). На фиг. 77 вписаны измѣненія длины стержней (въ



Фиг. 77.

мм.), а на фиг. 78—значенія $E\Delta\alpha$ (въ клгр. на кв. см.). Читателю рекомендуется рѣшить эту задачу, принявъ неподвижными узелъ 10 и направление стержня 10—9.



Фиг. 78.

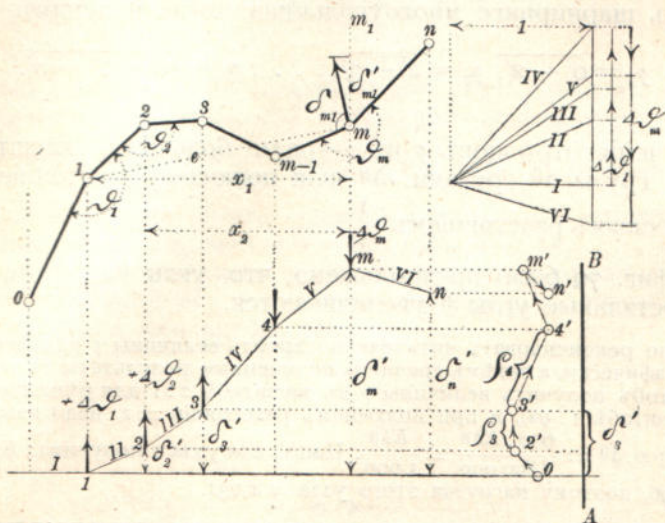
42. Изложенный способ построения диаграммъ перемѣщеній называется *способомъ шарнирнаго многоугольника*; при этомъ способъ получаются болѣе наглядныя фигуры, чѣмъ при способѣ Виллю; способъ шарнирнаго многоугольника можно предпочесть въ тѣхъ случаяхъ, если при примѣненіи способа Виллю перпендикуляры къ Δs , служащіе для опредѣленія точекъ m' , пересекаются подъ очень острыми углами. Способъ этотъ требуетъ нѣсколько больше времени, съ другой стороны онъ доставляетъ величины измѣненія угловъ, которыми можно воспользоваться при опредѣленіи измѣненій въ напряженіяхъ, происходящихъ вслѣдствіе того, что рѣшетка, рассчитанная на шарнирность узловъ, будетъ имѣть въ узлахъ неподвижныя заклепочныя соединенія. Задача эта, которую приведемъ въ 3 части этого тома, рѣшается при помощи измѣненій угловъ весьма просто. При этомъ, конечно, предполагается, какъ это часто бываетъ, что *дополнительныя* напряженія и перемѣщенія опредѣляются для одного и того же состоянія нагрузки.

Можно также воспользоваться и смѣшаннымъ способомъ. Напр. при изслѣдованіи фермъ, представленныхъ на фиг. 50 до 56, отдѣльныя діаграммы для каждой части фермы можно построить по способу шарнирнаго многоугольника, остальные же построения можно вести по способу Виллю.

43. Графическое опредѣленіе величинъ ρ . Разсмотримъ (какъ и въ № 39) шарнирный многоугольникъ $0-1-2 \dots -n$, фиг. 79, узелъ котораго 0 и направление стержня $0-1$ неподвижны; отыщемъ перемѣщенія узловъ, зависящія только отъ измѣненія угловъ $\Delta\theta$, причемъ примемъ, что всѣ $\Delta s = 0$. Діаграмма перемѣщеній будетъ состоять въ этомъ случаѣ изъ многоугольника $0-2'-3'- \dots -n'$, стороны котораго $02' = \rho_2 = s_2 \Delta\theta_2$, $2'3' =$

$= p_3 = s_3 \Delta \theta_3, \dots$ соответственно перпендикулярны къ стержнямъ s_2, s_3, \dots ; этотъ многоугольникъ легко построить, если только будутъ даны проекціи $\delta'_2, \delta'_3, \dots$ перемѣщений oz', oz', \dots на прямую AB (направленіе AB не должно быть параллельно ни одному изъ стержней, дабы не получить пересѣченія подѣ прямымъ угломъ съ какой либо стороной p).

Проекции перемещений δ' находятся очень легко. Для этого примемъ сначала, что мѣняется только уголъ ϑ_1 , т. е. что часть многоугольника 1—2—... n повернется на уголъ $\Delta\vartheta_1$. Точка m , отстоящая отъ центра вращения 1 на разстояніи e , перемѣстится по направленію, перпендикулярному къ прямой 1— m на величину



Фиг. 79.

$\vartheta_{m,1} = e\Delta\vartheta_1$, проекція якого $\vartheta'_{m,1}$ на пряму mm_1 , паралельную AB определится из пропорции:

$$\partial'_{m,1} = x_1 : c,$$

гдѣ x_i — расстояние узла i отъ прямой mm_1 . Отсюда получимъ

$$\delta'_{m,1} = x, \Delta \vartheta_1;$$

если же всѣ углы получать данныя измѣненія $\Delta\theta$, то

$$(3) \quad \vartheta'_m = x_1 \Delta \vartheta_1 + x_2 \Delta \vartheta_2 + \dots + x_{m-1} \Delta \vartheta_{m-1} = \sum_1^{m-1} x \Delta \vartheta.$$

Изміненія кутів $\Delta\vartheta_m, \Delta\vartheta_{m+1}, \dots$ не мають впливу на переміщення вузла m .

Выражение въ правой части уравненія (3) можно рассматри-
вать, какъ *статическій моментъ относительно точки m* силъ $\Delta\theta$,

$\Delta\theta_1, \dots, \Delta\theta_{m-1}$, приложенных левее узла m и имеющих направление AB ; а отсюда (по № 17, томъ I, выпускъ I) получается слѣдующій графическій способъ опредѣленія величинъ ρ .

Для грузовъ *) $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_{n-1}$, строимъ веревочный многоугольникъ съ полюснымъ разстояніемъ равнымъ единицѣ; первую сторону лучше взять перпендикулярно къ AB . Разстоянія узловъ 2, 3, \dots, m, \dots, n веревочнаго многоугольника по направленьямъ, параллельнымъ прямой AB , до бока I будутъ $\delta'_2, \dots, \delta'_m, \dots, \delta'_n$. Проведемъ теперь черезъ точки 1, 2, \dots, m, \dots, n веревочнаго многоугольника линіи, параллельныя боку I и построимъ многоугольникъ $o'2' \dots m' \dots n'$, вершины котораго лежатъ на этихъ параллельныхъ линіяхъ, а бока перпендикулярны соответствующимъ сторонамъ шарнирнаго многоугольника; тогда получимъ величины:

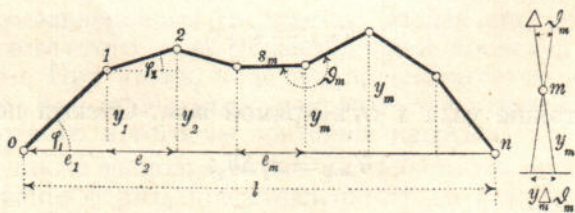
$$\rho_2 = o' - 2', \rho_3 = 2' - 3', \dots, \rho_n = (n-1)' - n'.$$

Для полученія отрѣзковъ ρ въ v -разъ большемъ масштабѣ надо замѣнить грузы $\Delta\theta$ грузами $v\Delta\theta$ или полюсное разстояніе 1 замѣнить полюснымъ разстояніемъ $\frac{1}{v}$.

На фиг. 79 было предположено, что углы θ_{m-1} и θ_m уменьшаются, а остальные углы θ увеличиваются.

Можно рекомендовать читателю построить величины ρ для фиг. 76 (листъ черт. 2) графически, а затѣмъ сравнить полученные результаты съ результатами расчета. Чтобы получить величины ρ въ масштабѣ 2:1 для рѣшетки, вычерченной въ масштабѣ 1:300, и при полюсномъ разстояніи = 1, надо нагрузить узлы грузами $2 \cdot 300 \cdot \Delta\theta = \frac{600 \cdot E\Delta\theta}{1800000} = \frac{E\Delta\theta}{3000}$. Напр., для узла 1 получимъ: $E\Delta\theta = 2170 + 926 = 3096$, поэтому нагрузка этого узла = 1,032.

44. Измѣненіе длины хорды шарнирнаго многоугольника. Одна изъ задачъ, важныхъ для будущихъ изслѣдованій, состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить измѣненіе разстоянія между двумя узлами o и n шарнирнаго многоугольника (фиг. 80)



Фиг. 80.

при помощи измѣненій длины Δs и измѣненій угловъ $\Delta\theta$. Обозначимъ разстояніе произвольнаго узла m отъ хорды $o-n$ буквой y_m , уголъ наклоненія стержня s_m къ хордѣ $o-n$ черезъ φ_m ; кромѣ того положимъ, что $s_m \cos \varphi_m = e_m$.

*) Выраженіе *грузъ* здѣсь понимается, конечно, въ математическомъ смыслѣ. Величины $\Delta\theta$ наносятся на чертежъ при помощи особаго численнаго масштаба

Увеличеніе угла ϑ_m на $\Delta\vartheta_m$ вызываетъ только измѣненіе $\Delta l = y_m \Delta\vartheta_m$ (этотъ результатъ слѣдуетъ непосредственно изъ № 43 и изъ фиг. 80); измѣненію же длины стержня s_m на Δs_m соотвѣтствуетъ $\Delta l = \Delta s_m \cos \varphi_m$. Въ суммѣ же получаемъ:

$$\Delta l = \sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m + \sum_1^m \Delta s_m \cos \varphi_m^*);$$

въ случаѣ же, если $t=0$ (т. е. $\Delta s = \frac{\sigma s}{E}$), получимъ:

$$(4) \quad \Delta l = \sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m + \sum_1^n \frac{\sigma_m}{E} e_m.$$

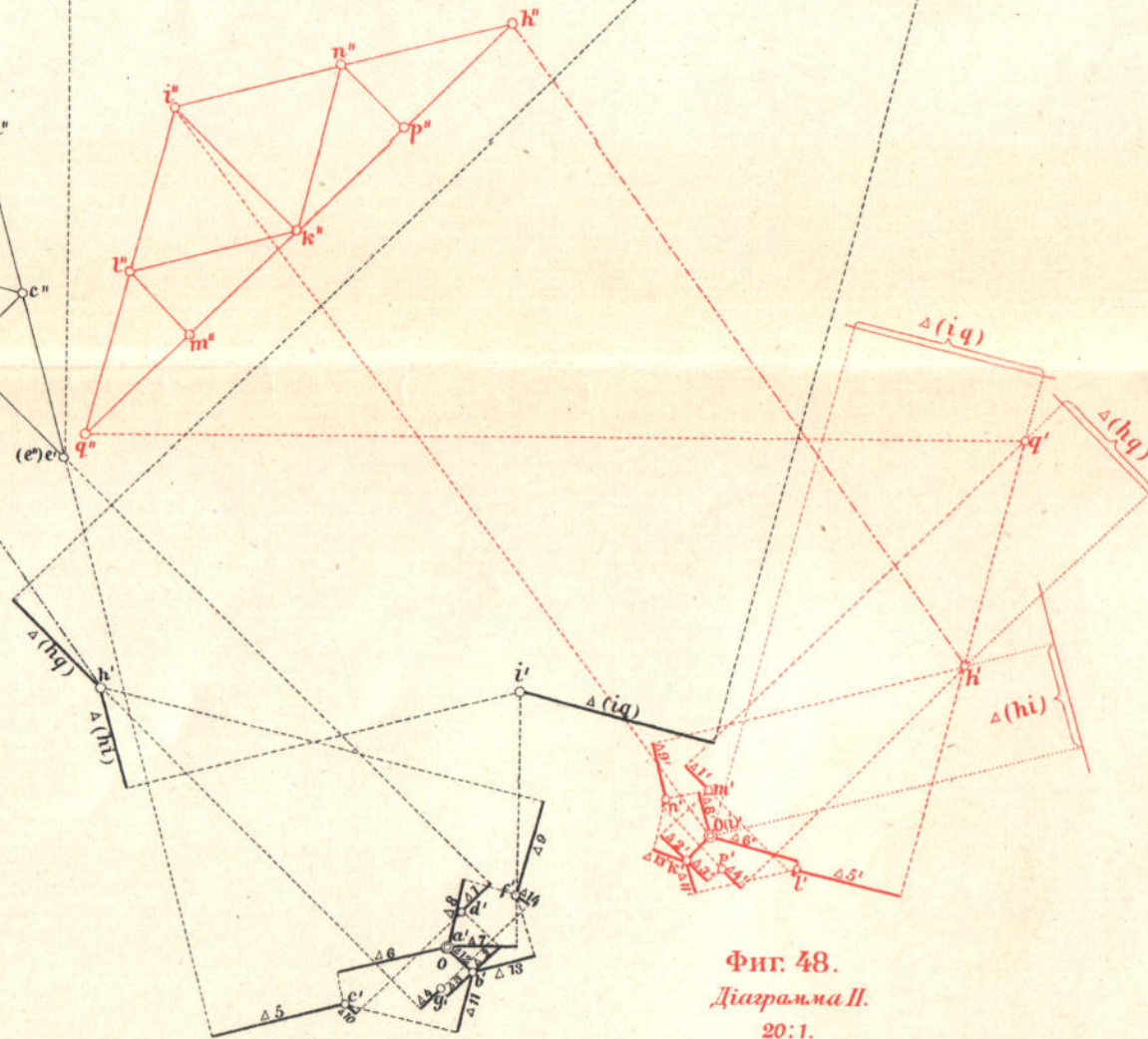
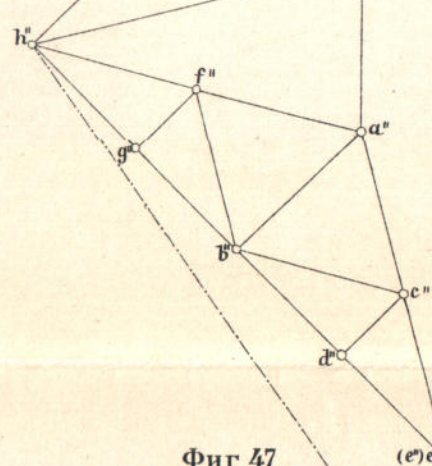
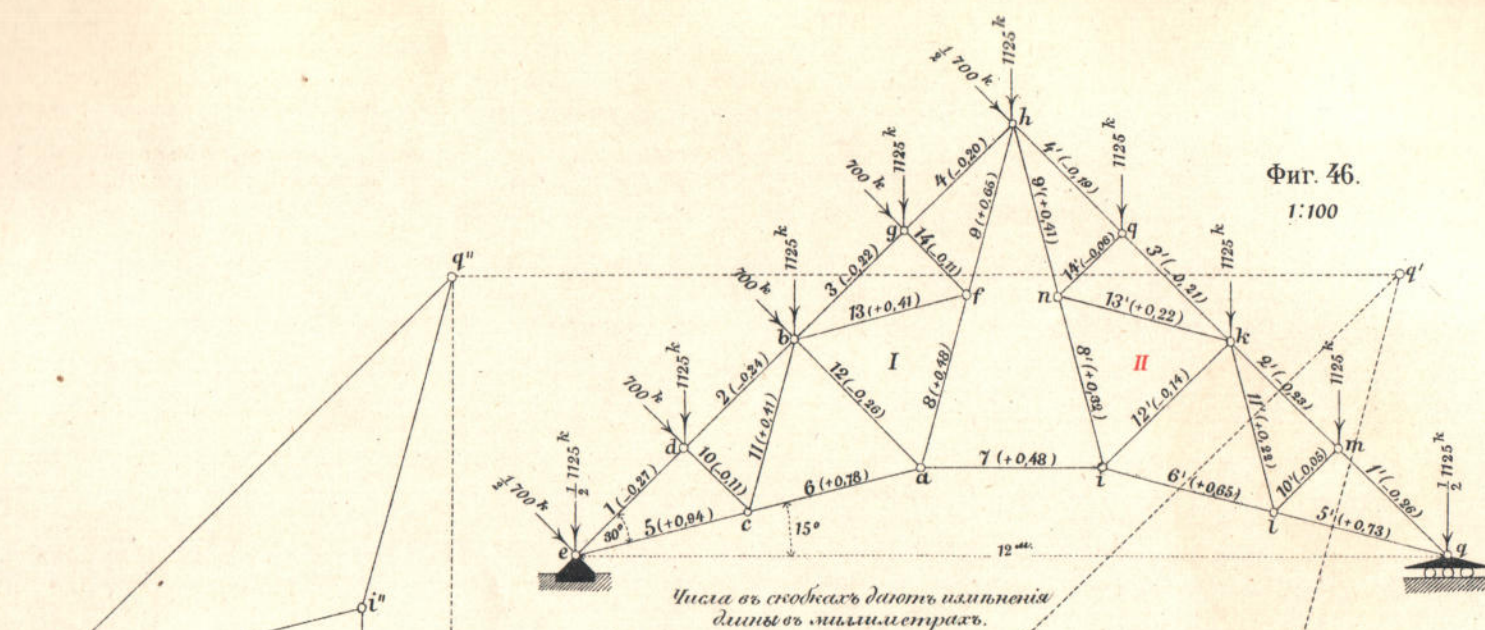
Желая примѣнить эту формулу для тѣхъ случаевъ, когда требуется принять во вниманіе измѣненія температуры, придется увеличить напряженіе $\sigma = \frac{S}{F}$ на величину εEt ; см. конецъ № 40.

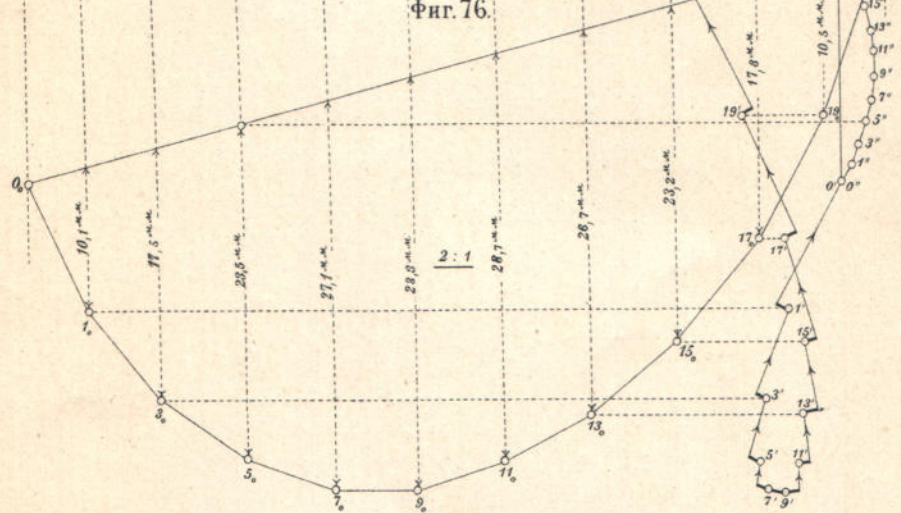
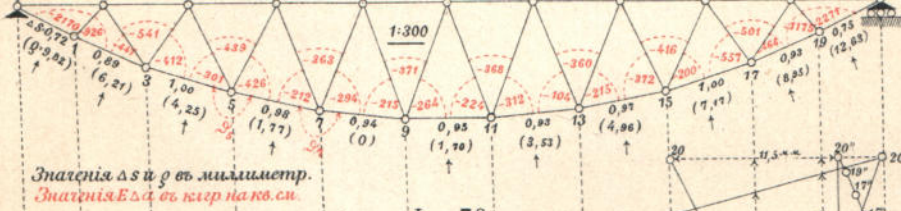
Выраженіе $\sum y \Delta\vartheta$ можно разсматривать какъ статическій моментъ относительно прямой $o-n$ грузовъ $\Delta\vartheta_1, \Delta\vartheta_2, \dots$, приложенныхъ къ узламъ шарнирнаго многоугольника и параллельныхъ линіи $o-n$. Слѣдовательно, это выраженіе можно построить при помощи веревочнаго многоугольника.



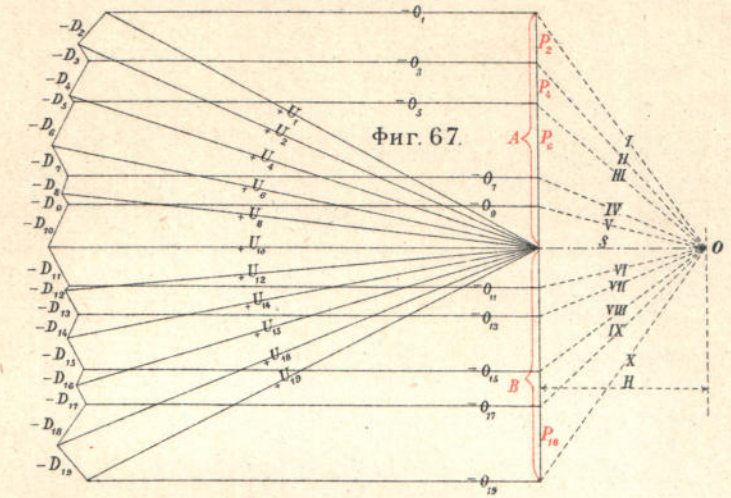
*) Выраженіе $\sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m = \sum_{m=1}^{m=n-1} y_m \Delta\vartheta_m$ означаетъ сумму величинъ $y \Delta\vartheta_1, y_2 \Delta\vartheta_2 \dots$

до $y_{n-1} \Delta\vartheta_{n-1}$.

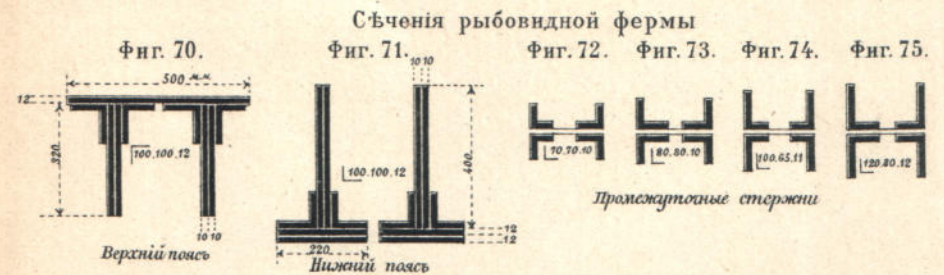
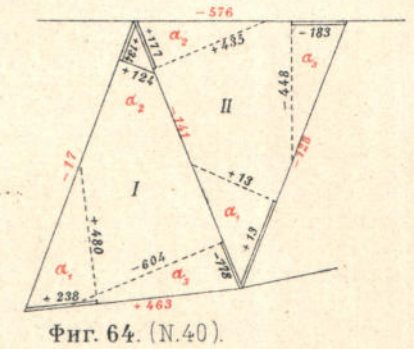
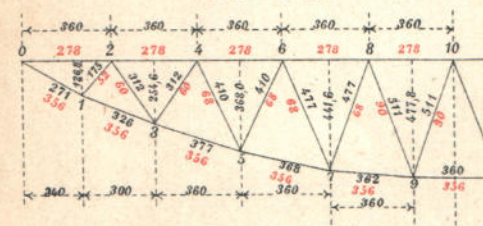




Усилия в тоннах.
Напряжения в кг на кв. см.



Фиг. 68. Длина в см.
Степени в см²



Фиг. 64.66.67.68.69.70.71.72.73.74.75.76.

ЦѢНА ПОЛНАГО ИЗДАНІЯ

(2 тома—10 выпусковъ объемъ около 65 печатныхъ листовъ съ 1000 чертежами въ текстѣ и 15 литографированными таблицами)

по подпискѣ въ книжныхъ магазинахъ — **12** рублей.

Для гг. студентовъ техническихъ заведеній по подпискѣ у издателя—(С.-Петербургъ, Фонтанка 24, кв. 9) —
8 рублей.

При полученіи перваго выпуска вносится **3** руб., при послѣдующихъ по **1** руб. **50** коп. до полной уплаты. (Для студентовъ **3** руб. при полученіи перваго выпуска и по **1** руб. при слѣдующихъ).

За пересылку по вѣсу и разстоянію налагается платежъ.

Отдѣльные выпуски продаваться не будутъ.

ИЗДАНІЕ БУДЕТЪ ОКОНЧЕНО ВЪ ТЕЧЕНІИ 1899 ГОДА.

НАПЕЧАТАНЫ СЛѢДУЮЩІЕ ВЫПУСКИ: I и V (томъ I), VI (Томъ II).

Дозволено цензурою С.-Петербургъ, 21 Декабря 1898 г.

Типо-литографія и переплетная Ю. А. Мансфельдъ, М. Морская, № 9.